

# Physikalische Formelsammlung

Florian Schäfer

20. März 2002

Notwendiger Hinweis: Ich habe natürlich versucht, in dieser Sammlung Fehler so weit wie es geht zu vermeiden. Trotzdem kann ich *keine Garantie* für die hier gemachten Angaben übernehmen. Deshalb bin ich immer froh, wenn ich, am besten per eMail an [florian@netego.de](mailto:florian@netego.de), über gefundene Fehler informiert werde.

Florian Schäfer

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Bewegung von Massenpunkten</b>	<b>1</b>
1.1	Kreisbewegung . . . . .	1
1.2	Mechanik des Massenpunktes . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Energie</b>	<b>1</b>
2.1	Arbeit . . . . .	1
2.2	Energieformen . . . . .	2
2.3	Energieerhaltung . . . . .	2
2.4	Statisches Gleichgewicht . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Impuls</b>	<b>2</b>
3.1	Kraftstoß . . . . .	3
3.2	Impulserhaltung . . . . .	3
3.3	Zentraler elastischer Stoß . . . . .	3
3.4	Zentraler inelastischer Stoß . . . . .	3
3.5	Raketengleichung . . . . .	3
3.6	Gesamtimpuls & Gesamtkraft . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Ausgedehnte Körper</b>	<b>4</b>
4.1	Schwerpunkt . . . . .	4
4.2	Reduzierte Masse . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Drehimpuls</b>	<b>4</b>
5.1	Definitionen . . . . .	4
5.2	Drehimpulserhaltung . . . . .	5
5.3	Bahnbewegung durch Zentralkraft . . . . .	5
5.4	Drehimpuls starrer Körper . . . . .	5
5.5	Formeln zum Drehimpuls und Trägheitsmoment . . . . .	5
5.6	Hauptträgheitsachsen . . . . .	6

5.7	Spezielle Trägheitsmomente . . . . .	6
5.8	Das physikalische Pendel . . . . .	6
5.9	Nutation und Präzession . . . . .	6
5.10	Quantisierung des Drehimpulses . . . . .	6
5.11	Gegenüberstellung der Translations- und Rotationsgrößen . . .	7
<b>6</b>	<b>Elastische Eigenschaften</b>	<b>7</b>
6.1	Dehnung . . . . .	7
6.2	Querkontraktion . . . . .	7
6.3	Kompressionsmodul . . . . .	7
6.4	Scherung . . . . .	8
6.5	Balkenbiegung . . . . .	8
<b>7</b>	<b>Schwingungen</b>	<b>8</b>
7.1	Ansatz für Dämpfung . . . . .	8
7.2	Schwache Dämpfung (Normalfall) . . . . .	9
7.3	Überdämpfte Schwingung . . . . .	9
7.4	Aperiodischer Grenzfall . . . . .	9
7.5	Erzwungene Schwingungen . . . . .	9
7.6	Gekoppelte Schwingungen, Schwebung . . . . .	10
<b>8</b>	<b>Flüssigkeiten</b>	<b>10</b>
8.1	Druck . . . . .	10
8.2	Oberflächenspannung . . . . .	11
8.3	Bernoulli-Gleichung . . . . .	11
8.4	Viskosität . . . . .	11
8.5	Laminare Strömung . . . . .	11
8.6	Turbulente Strömung . . . . .	11
<b>9</b>	<b>Wellen</b>	<b>12</b>
9.1	Wellengleichungen und Dispersionsrelation . . . . .	12
9.2	DGL der Wellenausbreitung . . . . .	12
9.3	Ausbreitungsgeschwindigkeiten . . . . .	12
9.4	Doppler-Effekt . . . . .	12
9.5	Energie und Energiedichte einer Welle . . . . .	13
9.6	Gruppengeschwindigkeit . . . . .	13
<b>10</b>	<b>Wärmelehre</b>	<b>13</b>
10.1	Konstanten und Bewegungsenergie . . . . .	13
10.2	Thermische Ausdehnung . . . . .	14
10.3	Thermospannung / Kontaktpotentiale . . . . .	14
10.4	Kinetische Theorie der Gase (ideales Gas) . . . . .	14
10.5	Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung . . . . .	14
10.6	Van der Waals Gleichung . . . . .	15
10.7	Gesetz von Clausius-Clapeyron . . . . .	15
10.8	1. Hauptsatz der Wärmelehre . . . . .	15
10.9	Formeln zur Arbeit an und Wärme von Gasen . . . . .	15
10.10	Kreisprozesse . . . . .	16
10.11	Enthalpie . . . . .	16
10.12	Entropie . . . . .	17

10.13	Freie Energie . . . . .	17
10.14	Transportprozesse . . . . .	17
10.15	Einstein Relation und Viskosität von Gasen . . . . .	18
10.16	Wärmestrahlung . . . . .	18
<b>11</b>	<b>Elektrostatik</b>	<b>19</b>
11.1	Coulomb-Gesetz und elektrisches Feld . . . . .	19
11.2	Elektrisches Potential . . . . .	19
11.3	Feld eines elektrischen Dipols . . . . .	19
11.4	Gauß'scher Satz der Elektrostatik . . . . .	20
11.5	Kapazitäten . . . . .	20
11.6	Isolatoren, Dielektrika, Dipole . . . . .	20
11.7	Clausius-Mossotti-Beziehung . . . . .	21
11.8	Elektrischer Strom . . . . .	22
<b>12</b>	<b>Magnetostatik</b>	<b>22</b>
12.1	Stationäre Ströme . . . . .	22
12.2	Spezielle Felder . . . . .	23
12.3	Gesetz von Biot-Savart . . . . .	23
12.4	Lorentzkraft . . . . .	23
12.5	Hall-Effekt . . . . .	23
12.6	Magnetische Dipole . . . . .	23
12.7	Materie im magnetischen Feld . . . . .	24
12.8	Zusammenfassung und Vergleich . . . . .	24
12.9	Feldübergang an einer Grenzfläche . . . . .	25
<b>13</b>	<b>Zeitlich veränderliche Magnetfelder</b>	<b>25</b>
13.1	Induktion . . . . .	25
13.2	Energie des magnetischen Feldes . . . . .	25
13.3	Transformator . . . . .	26
13.4	Supraleitung . . . . .	26
<b>14</b>	<b>Wechselstromkreis</b>	<b>27</b>
14.1	Strom, Spannung und ohmscher Widerstand . . . . .	27
14.2	Induktivität und Kapazität . . . . .	27
14.3	Schwingkreis . . . . .	27
<b>15</b>	<b>Elektromagnetische Wellen</b>	<b>28</b>
15.1	Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen . . . . .	28
15.2	Monochromatische Wellen . . . . .	28
15.3	Energie, Poynting, Impuls . . . . .	28
15.4	Strahlung des Hertz'schen Dipols . . . . .	28
15.5	Brechung, Dispersion und Reflexion . . . . .	29
15.6	Elektromagnetische Wellen in Metallen . . . . .	29
15.7	Wellenleitung . . . . .	30
15.8	Streuung und Polarisierung . . . . .	31
15.9	Interferenz und Beugung . . . . .	31

<b>16 Optik und Strahlung</b>	<b>32</b>
16.1 Abbildungssysteme . . . . .	32
16.2 Auflösungsvermögen . . . . .	32
16.3 Hohlraumstrahlung . . . . .	32

## 1 Bewegung von Massenpunkten

### 1.1 Kreisbewegung

Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (1.1)$$

Bahngeschwindigkeit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (1.2)$$

Zentripetalbeschleunigung

$$a = \omega^2 r = \omega v = \frac{v^2}{r} = |\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| \quad (1.3)$$

### 1.2 Mechanik des Massenpunktes

Gravitationskraft

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (1.4)$$

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$$

Federpendel

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \quad (1.5)$$

Mathematisches Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1.6)$$

Reibungskraft

$$F = \mu F_G \cos \alpha \quad (1.7)$$

Corioliskraft

$$\vec{F} = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega}) \quad (1.8)$$

## 2 Energie

### 2.1 Arbeit

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \\ W &= \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned} \quad (2.1)$$

## 2.2 Energieformen

Kinetische Energie

$$dE_k = d\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) \quad (2.2)$$

Potentielle Energie bei Feder

$$E_P = \frac{1}{2}Dx^2 \quad (2.3)$$

Potentielle Energie bei Hubarbeit

$$E_P = mgh \quad (2.4)$$

Gravitationspotential

$$E_P(r) = -\frac{GMm}{r} \quad (2.5)$$

## 2.3 Energieerhaltung

Ist die zu leistende Arbeit nur von Anfangs- und Endpunkt abhängig, also vom Weg unabhängig, spricht man von einer *konservativen Kraft*.

Für konservative Kräfte gilt:

$$\underbrace{\int_1^2 F(\vec{r})d\vec{r}}_{\text{Weg A}} + \underbrace{\int_2^1 F(\vec{r})d\vec{r}}_{\text{Weg B}} = 0 \Rightarrow \oint \vec{F}d\vec{r} = 0 \quad (2.6)$$

Für nicht konservative Kräfte gilt entsprechend:

$$\oint \vec{F}d\vec{r} \neq 0 \quad (2.7)$$

Gradient der potentiellen Energie

$$\vec{F} = -\text{grad } E_P = -\left\{\frac{\partial E_P}{\partial x}, \frac{\partial E_P}{\partial y}, \frac{\partial E_P}{\partial z}\right\} \quad (2.8)$$

## 2.4 Statisches Gleichgewicht

Gleichgewicht dann, wenn zur Veränderung des Ortes um einen kleinen Beitrag  $dx$  keine Arbeit erforderlich ist (d.h. die potentielle Energie bleibt gleich).

$$dE_P = dx F = 0 \quad (2.9)$$

## 3 Impuls

Definition des Impulses:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m\vec{v} \\ \dot{\vec{p}} &= m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \end{aligned} \quad (3.1)$$

### 3.1 Kraftstoß

In Worten: Impulsänderung = Kraft x Zeit

$$\begin{aligned} d\vec{p} &= \vec{F}(t)dt \\ \int_1^2 d\vec{p} &= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt \end{aligned} \quad (3.2)$$

### 3.2 Impulserhaltung

1. Erhaltungssatz:

$$\sum_j \vec{p}_j = \vec{p} = \text{const.} \quad (3.3)$$

2. Erhaltungssatz:

Die inneren Kräfte eines abgeschlossenen Systems ergeben keine Änderung des Gesamtimpulses.

### 3.3 Zentraler elastischer Stoß

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung: } v_2 &= 0 \\ v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\text{Allgemein: } v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2} \quad (3.5)$$

### 3.4 Zentraler inelastischer Stoß

$$\begin{aligned} \text{Anfangsbedingung: } v_2 &= 0 \\ v_1' = v_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\text{Energieverlust: } \Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3.7)$$

### 3.5 Raketengleichung

Allgemeiner Ansatz:

$$m \frac{dv}{dt} = -u \frac{dm}{dt} - F^{\text{ext}} \quad (3.8)$$

Lösung mit Gravitation in Erdnähe:

$$v(t) = u \ln \left( \frac{m_A}{m_A - \mu t} \right) - gt = u \ln \left( \frac{m_A}{m(t)} \right) - gt \quad (3.9)$$

$m(t)$ : zeitliche Masse der Rakete;  $m_A$ : Anfangsmasse;  $\mu = -\frac{dm}{dt}$ : Massendurchsatz;  $u$ : Geschwindigkeit der Gase relativ zur Rakete

### 3.6 Gesamtimpuls & Gesamtkraft

Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i \quad (3.10)$$

Gesamte von außen angreifende Kraft

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \quad (3.11)$$

## 4 Ausgedehnte Körper

### 4.1 Schwerpunkt

Der Ortsvektor  $\vec{r}_S$  des Schwerpunktes ist

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad (4.1)$$

Bei zeitunabhängigen Massen liefert Differentiation Impulssatz:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= m \dot{\vec{r}}_S = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \\ \dot{\vec{p}} &= m \ddot{\vec{r}}_S = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (4.2)$$

*Schwerpunktsatz:* Der Schwerpunkt eines Systems von Massen bewegt sich so, als ob die Gesamtmasse im Schwerpunkt vereinigt wäre und die Summe aller äußeren Kräfte dort angreifen würde.

### 4.2 Reduzierte Masse

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} &= \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} & \mu: \text{reduzierte Masse} \\ \mu \ddot{\vec{r}} &= \vec{F}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Die Relativbewegung zweier Teilchen, die nur ihrer gegenseitigen Wechselwirkung unterliegen, ist identisch der Bewegung eines Körpers mit reduzierter Masse  $\mu$  und einer Wechselwirkungskraft, die vom Ursprung ausgeht.

## 5 Drehimpuls

### 5.1 Definitionen

Drehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \\ [L] &= Js = Ws^2 = \frac{m^2 kg}{s} \end{aligned} \quad (5.1)$$



Drehmoment

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt} \\ [M] &= J = Ws = \frac{m^2 kg}{s^2}\end{aligned}\quad (5.2)$$

## 5.2 Drehimpulserhaltung

Fällt beim Wirken einer Zentralkraft der Koordinatenursprung mit dem Wirkungszentrum der Kraft zusammen, wird das Drehmoment null.

$$\vec{M} = 0 \rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \rightarrow \vec{L} = const \quad (5.3)$$

Hieraus folgt die *Erhaltung des Drehimpulses*.

## 5.3 Bahnbewegung durch Zentralkraft

$v_r$  als Funktion vom  $r$  bei gegebenem  $L$  und  $E$ :

$$\frac{m}{2}v_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r} = E = const. \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}U' &= \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{c}{r} \\ \Rightarrow E &= \frac{m}{2}v_r^2 + U'(r)\end{aligned}\quad (5.5)$$

Je nach Gesamtenergie  $E$  ergeben sich drei mögliche Bahnkurven:

1.  $E = E_1 > 0$ : kein gebundener Zustand möglich, Hyperbelbahn
2.  $E = E_2 = \text{Minimum von } U' < 0$ : Kreisbahn
3.  $E_2 < E = E_3 < 0$ : Oszillation zwischen zwei Kreisbahnen, Ellipse

## 5.4 Drehimpuls starrer Körper

Definition des *Trägheitsmomentes*:

$$J = \sum_i m_i r_{\perp i}^2 = \int r^2 dm = \int r^2 \varrho dV \quad (5.6)$$

Hieraus ergibt sich der Drehimpuls eines Körpers wie folgt:

$$\vec{L} = J\vec{\omega} \quad (5.7)$$

## 5.5 Formeln zum Drehimpuls und Trägheitsmoment

Steinerscher Satz:

$$J_A = J_S + ma^2 \quad (5.8)$$

Rotationsenergie:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2 \quad (5.9)$$

## 5.6 Hauptträgheitsachsen

Aus der theoretischen Mechanik: Es gibt drei aufeinander senkrecht stehende Achsen durch den Schwerpunkt eines Körpers, so daß  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ . Bei der Rotation um die Hauptträgheitsachsen wirkt wegen  $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$  kein Drehmoment auf die Achsen, daher bleibt die Rotationsbewegung um die drei Achsen stabil.

Es zeigt sich:  $J_1 > J_2 > J_3$ , wobei größeres Trägheitsmoment gleich stabilere Rotation bedeutet.

## 5.7 Spezielle Trägheitsmomente

dünne Stange	$J = \frac{1}{3}ml^2$ (Rotation um eines der Enden)
Hohlzylinder	$J = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Vollzylinder	$J = \frac{m}{2}r^2$
Kugel	$J = \frac{2}{5}mr^2$

## 5.8 Das physikalische Pendel

$$\omega = \sqrt{\frac{smg}{J_S + ms^2}} \quad (5.10)$$

## 5.9 Nutation und Präzession

**Nutation** Wirkt auf ein  $\vec{L}$  kurzzeitig ein Drehmoment, so ist  $\vec{L}$  nicht mehr parallel zu  $\vec{\omega}$ . Da jetzt keine Kraft mehr einwirkt, gilt wieder die Erhaltung des Drehimpulses. Deshalb muß sich jetzt  $\vec{\omega}$  um  $\vec{L}$  drehen. Dies nennt man *Nutation*.

**Präzession** Wirkt ständig ein Drehmoment  $\vec{r} \times \vec{F} \perp \vec{L}$ , so „weicht“ der Drehimpuls senkrecht zu Kraft, also in Richtung des Drehmomentes aus. Dabei ändert sich nur die Richtung,  $|\vec{L}|$  bleibt konstant. Die ist eine *Präzessionsbewegung*. Präzessionsfrequenz  $\omega_p$ :

$$d\alpha = \frac{d\vec{L}}{\vec{L}} = \frac{\vec{M}dt}{\vec{L}} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = \omega_p = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} \quad (5.11)$$

## 5.10 Quantisierung des Drehimpulses

Der Drehimpuls ist nur ganz- oder halbzahliges Vielfaches vom *Planck'schen Wirkungsquant*.

$$L = J\omega = \hbar \rightarrow \omega = \frac{\hbar}{J} \quad (5.12)$$

$$E = \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}L\omega = \frac{1}{2}\frac{\hbar L}{J} \quad (5.13)$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,0546 \cdot 10^{-34} Js \text{ oder } \frac{kg m}{s}$$

### 5.11 Gegenüberstellung der Translations- und Rotationsgrößen

Translation	Rotation
Ort $x$	Winkel $\varphi$
Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ ; $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$	Kreisfrequenz $\omega = \dot{\varphi}$ ; $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2$
Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{x}$	Winkelbeschleunigung $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$
Kraft $\vec{F}$	Drehmoment $\vec{M}$
Masse $m$	Trägheitsmoment $J$
Impuls $p = mv$	Drehimpuls $L = J\omega$
$F = m\ddot{x} = \frac{d}{dt}mv = \frac{d}{dt}p$	$M = J\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt}J\omega = \frac{d}{dt}L$
$E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	$E_{rot} = \frac{1}{2}J\omega^2$
Arbeit $\int Fdx$	Arbeit $\int M d\varphi$
Leistung $F\dot{x} = Fv$	Leistung $M\dot{\varphi} = M\omega$
lineare Feder $F = -Dx$	Torsionsfeder $M = -D^*\varphi$
Impulserhaltung $\sum m\vec{v} = \sum m\vec{v}^i$	Drehimpulserhaltung $\sum J\vec{\omega} = \sum J\vec{\omega}^i$

## 6 Elastische Eigenschaften

### 6.1 Dehnung

Spannung:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \text{Dim. : } \frac{N}{m^2} \quad (6.1)$$

Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad \text{dimensionslos} \quad (6.2)$$

Hook'sches Gesetz (Elastizitätsmodul, Youngs-modul):

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{Fl}{A\Delta l} \quad \text{Dim. : } \frac{N}{m^2} \quad (6.3)$$

### 6.2 Querkontraktion

Poissonzahl:

$$\mu = -\frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta l}{l}} \quad (6.4)$$

Verringerung des Durchmessers:

$$\frac{\Delta d}{d} = \mu \frac{\Delta l}{l} = \mu \varepsilon = \frac{\mu}{E} \sigma \quad (6.5)$$

### 6.3 Kompressionsmodul

Körper unter allseitigem Druck:  $p = -\frac{F}{A} = -\sigma$

Volumenänderung:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3\sigma}{E}(1 - 2\mu) = -p \frac{3}{E}(1 - 2\mu) \quad (6.6)$$

Kompressionsmodul  $\kappa$ :

$$-\frac{\Delta V}{V} = \frac{p}{\kappa} \Rightarrow \kappa = -\frac{p}{\frac{\Delta V}{V}} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \quad \text{Dim.: } \frac{N}{m^2} \quad (6.7)$$

Kompressibilität  $K = \frac{1}{\kappa}$

## 6.4 Scherung

Schubspannung:

$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{Dim.: } \frac{N}{m^2} \quad (6.8)$$

Scherwinkel  $\alpha$  (in rad) ist proportional zur Schubspannung:

$$\alpha = \frac{\tau}{G} \rightarrow \tau = \alpha G \quad \text{Schubmodul } G \left[ \frac{N}{m^2} \right] \quad (6.9)$$

Für *isotrope* Materialien gibt es nur zwei unabhängige Größen:

$$1. \quad \kappa = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

$$2. \quad \frac{E}{2G} = 1 + \mu$$

wobei  $0 < \mu < 0,5 \rightarrow \frac{E}{2} > G > \frac{E}{3}$

## 6.5 Balkenbiegung

Drehmoment an Stelle  $x$  ( $a$  als Höhe des Balkens):

$$\vec{M} = \frac{2\sigma_{Rand}(x)}{a} I \quad (6.10)$$

Flächenmoment (größeres Flächenmoment  $\rightarrow$  höhere Stabilität):

$$I = \int y^2 dA \quad (6.11)$$

Auslenkung im Abstand  $x$  von Befestigung:

$$h(x) = \frac{Fx^2}{6EI} (3l - x) \quad (6.12)$$

# 7 Schwingungen

## 7.1 Ansatz für Dämpfung

$$m\ddot{x} = -Dx - b\dot{x} \quad (7.1)$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (7.2)$$

Allgemeine Lösung:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (7.3)$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (7.4)$$

## 7.2 Schwache Dämpfung (Normalfall)

Es gilt:

$$\omega_0 > \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{1}{2\tau}\right)^2} \quad (7.5)$$

$$x(t) = Ae^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.6)$$

Dämpfungsverhältnis:

$$K = e^{\frac{T}{2\tau}} = \frac{x(t)}{x(t+T)} \quad (7.7)$$

logarithmisches Dekrement:

$$\Lambda = \ln K = \frac{T}{2\tau} \quad (7.8)$$

Gütefaktor:

$$Q = \omega_0 \tau = \frac{-E}{\frac{dE}{dt} \frac{1}{\omega_0}} = \frac{\text{gespeicherte Energie}}{\text{in Zeit } \frac{1}{\omega} \text{ abgegebene Energie}} \quad (7.9)$$

## 7.3 Überdämpfte Schwingung

Es gilt:

$$\omega_0 < \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \Omega = \sqrt{\left(\frac{1}{2\tau}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (7.10)$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} (B_1 e^{\Omega t} + B_2 e^{-\Omega t}) \quad (7.11)$$

Randbedingungen:  $t = 0 : x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = 0$

$$B_1 = \frac{x_0}{2} \left(1 + \frac{1}{2\tau\Omega}\right) \quad B_2 = \frac{x_0}{2} \left(1 - \frac{1}{2\tau\Omega}\right)$$

## 7.4 Aperiodischer Grenzfall

Es gilt:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\tau} \Rightarrow \text{Sonderfall : } \Omega \rightarrow 0 \quad (7.12)$$

$$x(t) = e^{-\frac{t}{2\tau}} (C_1 + C_2 t) \quad (7.13)$$

Randbedingungen:  $t = 0 : x(t=0) = x_0, \dot{x}(t=0) = 0$

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(1 + \frac{t}{2\tau}\right) \quad (7.14)$$

## 7.5 Erzwungene Schwingungen

Bewegungsgleichung:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Dx = F(t) = F_0 \cos(\omega t) \quad (7.15)$$

mit  $\frac{1}{\tau} = \frac{b}{m}; \omega_0^2 = \frac{D}{m}; \alpha_0 = \frac{F_0}{m}$ :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = \alpha_0 \cos(\omega t) \quad (7.16)$$

Amplitude, Phasenverschiebung und Schwingungsgleichung:

$$X_0 = \frac{\alpha_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}} \quad (7.17)$$

$$\varphi = \arctan \frac{-\frac{\omega}{\tau}}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (7.18)$$

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.19)$$

Resonanzüberhöhung:

$$\frac{X_0(\omega = \omega_0)}{X_0(\omega = 0)} = \tau \omega_0 = Q \quad (7.20)$$

Absorbierte Leistung (zeitlich gemittelt):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} m \alpha_0 \tau \frac{\frac{\omega^2}{\tau^2}}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}} \quad (7.21)$$

## 7.6 Gekoppelte Schwingungen, Schwebung

Spezialfall:  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ ,  $A_1 = A_2 = A$

$$x(t) = A \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t\right) \quad (7.22)$$

$$\omega_1 = \omega_0; \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{2D}{m}} \approx \omega_0 \sqrt{1 + \frac{2D}{m\omega_0^2}}$$

# 8 Flüssigkeiten

## 8.1 Druck

$$p = \frac{F}{A} \quad (8.1)$$

Einheiten des Druckes:

$$\begin{aligned} 1 \frac{N}{m^2} &= 1 \text{ Pa} \\ 1 \text{ bar} &= 10^5 \frac{N}{m^2} \\ 1 \text{ atm} &= 101325 \text{ Pa} = 1,01325 \text{ bar} \\ 1 \text{ Torr} &= \frac{101325}{760} \text{ Pa} \rightarrow 1 \text{ bar} = 760 \text{ Torr} \end{aligned}$$

Schweredruck:

$$p = \frac{F}{A} = \rho g h \quad (8.2)$$

Auftrieb:

$$F_A = \rho_{Fl} g V = m_{Fl} g \quad (8.3)$$

## 8.2 Oberflächenspannung

Spezifische Oberflächenenergie:

$$\sigma = \frac{\text{Arbeit } \Delta W \text{ zur Bildung der Oberfläche } \Delta A}{\text{Fläche } \Delta A} \quad \text{Dim.: } \frac{\text{Energie}}{\text{Fläche}} = \frac{N}{m} \quad (8.4)$$

Arbeit zur Oberflächenvergrößerung:

$$\Delta W = 2\sigma\Delta A \quad (8.5)$$

Oberflächenspannung:

$$\sigma = \frac{F}{2d} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge des Randes der Oberfläche}} \quad (8.6)$$

Steighöhe durch Kapillarität (K - Körper; F - Flüssigkeit; G - Gas):

$$h = \frac{2(\sigma_{GK} - \sigma_{KF})}{\rho g r} \quad (8.7)$$

## 8.3 Bernoulli-Gleichung

Kontinuitätsgleichung:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (8.8)$$

Bernoulli-Gleichung

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{const.} \quad (8.9)$$

statischer Druck + dynamischer Druck + Schweredruck = const.

## 8.4 Viskosität

$$F = \eta A \frac{v}{x} = \eta A \frac{dv}{dx} \quad [\eta] = \frac{Ns}{m^2} = \frac{kg}{ms} \quad (8.10)$$

## 8.5 Laminare Strömung

Geschwindigkeitsprofil bei Strömung durch Rohr mit Radius  $R$ :

$$v(r) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta} \frac{p_2 - p_1}{l} \quad (8.11)$$

Durchfluss:

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8\eta} \frac{p_2 - p_1}{l} R^4 \quad (8.12)$$

## 8.6 Turbulente Strömung

Übergang zur turbulenten Strömung wird durch die *Reynoldszahl* beschrieben:

$$\begin{aligned} R_e &= \frac{\rho \bar{v} d}{\eta} \\ R_e &< 2300 \rightarrow \text{laminar} \\ R_e &> 2300 \rightarrow \text{turbulent} \end{aligned} \quad (8.13)$$

## 9 Wellen

### 9.1 Wellengleichungen und Dispersionsrelation

Die allgemeine Wellengleichung für eine beliebige Störung ist gegeben durch:

$$\xi = f(x \pm ct) \quad (9.1)$$

Im Fall der hamonischen Welle ergibt sich folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - ct)\right) = A \cos\left(\frac{2\pi\nu}{c}(x - ct)\right) \\ &= A \cos\left(\omega\left(\frac{x}{c} - t\right)\right) = A \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (9.2)$$

$$\xi = A \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) \text{ (Vektorschreibweise)} \quad (9.3)$$

mit dem Wellenvektor (auch Wellenzahl):

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (9.4)$$

und der *Dispersionsrelation*:

$$\omega = c \cdot k \quad (9.5)$$

### 9.2 DGL der Wellenausbreitung

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (9.6)$$

### 9.3 Ausbreitungsgeschwindigkeiten

Longitudinale Schallwellen in (dünnen) Stäben:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \quad (9.7)$$

Transversale Wellen in (dünnen) Stäben:

$$c = \sqrt{\frac{G}{\varrho}} \quad (9.8)$$

Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten (adiabatisch):

$$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M_r}} \quad (M_r = \text{rel. Masse} = \text{Molmasse}) \quad (9.9)$$

### 9.4 Doppler-Effekt

Ein positives  $v$  bedeutet ein Aufeinanderzubewegen von Quelle und Beobachter.

1. Fall: ruhende Quelle, ruhendes Medium und bewegter Beobachter:

$$\nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) \quad (9.10)$$



2. Fall: bewegte Quelle und ruhender Beobachter:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v}{c}} \quad (9.11)$$

Gilt  $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$  sind beide Gleichungen identisch.

Mach'scher Kegel:

$$\sin \alpha = \frac{c}{v} = \frac{1}{M} \quad (9.12)$$

Mach'sche Zahl:  $M = \frac{v}{c}$ ; Halber Öffnungswinkel:  $\alpha$

## 9.5 Energie und Energiedichte einer Welle

Energiedichte  $u$ :

$$u = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (9.13)$$

Energiestromdichte (Intensität)  $I$  einer Welle:

$$I = c \cdot u \quad [I] = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit Fläche}} = \frac{\text{Leistung}}{\text{Fläche}} \quad (9.14)$$

$$= \frac{1}{2} \rho \omega^2 c A^2 \quad (9.15)$$

Impulsstromdichte (Schallstrahlungsdruck):

$$p_{\text{Str.}} = \frac{I}{c} = u \quad (9.16)$$

Lautstärke in Phon beim Normalton von 1000 Hz:

$$L_N = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2} \quad (9.17)$$

## 9.6 Gruppengeschwindigkeit

Elementarwellen haben bei Ausbreitung in einem Medium mit *nichtlinearer Dispersion* eine von  $\omega$  abhängige Ausbreitungsgeschwindigkeit (*Phasengeschwindigkeit*). Ein Signal besteht aus einer ganzen Gruppe von Elementarwellen und bewegt sich mit der *Gruppengeschwindigkeit* fort.

Gruppengeschwindigkeit für nichtlineare Dispersion:  $\omega = c_P(k) \cdot k$

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = c_P + k \frac{dc}{dk} = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda} \quad (9.18)$$

Man unterscheidet *normale Dispersion* ( $c_g < c_P$ ) und *anormale Dispersion* ( $c_g > c_P$ ).

# 10 Wärmelehre

## 10.1 Konstanten und Bewegungsenergie

Benötigte Konstanten:

- Boltzmannkonstante:  $k_B = 1,308658 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$
- Universelle (molare) Gaskonstante:  $R = N_A \cdot k_B = 8,31441 \frac{J}{mol \cdot K}$

Translationsenergie:

$$\overline{E_{\text{trans}}} = \frac{3}{2} k_B T \quad (10.1)$$

## 10.2 Thermische Ausdehnung

Längenänderung ( $\alpha$ : linearer thermischer Ausdehnungskoeffizient):

$$l = l_0 [1 + \alpha(T - T_0)] \quad (10.2)$$

Volumenänderung ( $\gamma$ : Volumenausdehnungskoeffizient):

$$V = l_0^3 [1 + \alpha(T - T_0)]^3 \approx l_0^3 [1 + 3\alpha(T - T_0)] = V_0 [1 + \gamma(T - T_0)] \quad (10.3)$$

## 10.3 Thermospannung / Kontaktpotentiale

Thermokraft / differentielle Thermospannung ( $\epsilon$ : Seebeck Koeffizient):

$$\epsilon = \frac{dU}{dT} \Rightarrow U = \epsilon \Delta T \quad (10.4)$$

Wärmeleistung des Peltiereffektes ( $\pi$ : Peltierkoeffizient):

$$P = \pi I \quad (10.5)$$

Zusammenhang zwischen Thermokraft  $\epsilon$  und Peltierkoeffizient  $\pi$ :

$$\pi = \epsilon T \quad (10.6)$$

## 10.4 Kinetische Theorie der Gase (ideales Gas)

Druck auf Begrenzungsfläche:

$$p = \frac{1}{3} \frac{N}{V} m \overline{v^2} \quad (10.7)$$

Zustandsgleichung des idealen Gases:

$$pV = Nk_B T \quad (10.8)$$

$$pV = nRT \quad (10.9)$$

## 10.5 Maxwell-Boltzmann Geschwindigkeitsverteilung

Wahrscheinlichkeit für Geschwindigkeit  $v$ :

$$P(v) = 4\pi v^2 \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2k_B T}} \quad (10.10)$$

Geschwindigkeitsmittelungen:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \quad (10.11)$$

$$\bar{v} = \int_0^\infty dv v P(v) = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \quad (10.12)$$

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \int_0^\infty dv v^2 P(v) = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} \quad (10.13)$$

## 10.6 Van der Waals Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad (10.14)$$

Zusammenhang zwischen  $a$ ,  $b$  und den kritischen Werten:

$$V_{m,K} = 3b; \quad T_K = \frac{8a}{27Rb}; \quad p_K = \frac{a}{27b^2} \quad (10.15)$$

Gasgleichung am kritischen Punkt:

$$p_K V_{m,K} = \frac{3}{8} RT_K \quad (10.16)$$

## 10.7 Gesetz von Clausius-Clapeyron

Zusammenhang für Phasenumwandlungskurven, bei Umwandlung von Zustand  $i$  in Zustand  $k$  ( $Q_{ik}$  ist Umwandlungswärme):

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dT}} = \frac{T}{Q_{ik}} (V_k - V_i) \quad (10.17)$$

Dampfdruckkurve unter der Annahme eines idealen Gases mit vernachlässigbarem Flüssigkeitsvolumen ( $V_{gas} \gg V_{flüssig}$ ) und temperaturunabhängiger Verdampfungswärme  $Q_V$ .

$$p = p_0 e^{-\frac{Q_V}{RT}} \quad (10.18)$$

## 10.8 1. Hauptsatz der Wärmelehre

$$dU = dW + dQ \quad (10.19)$$

## 10.9 Formeln zur Arbeit an und Wärme von Gasen

Volumenarbeit:

$$dW = -pdV \Rightarrow W = - \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad (10.20)$$

Wärmekapazität:

$$dQ = C dT = m c dT = n C_m dT \quad (10.21)$$

Energie pro Mol und molare Wärmekapazität:

$$U_M = RT \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} f_{rot} + f_{vibr} \right) \quad (10.22)$$

$$\Rightarrow c_{m,V} = \left( \frac{dQ}{dT} \right)_V = \frac{dU_M}{dT} = R \left( \frac{3}{2} + \frac{1}{2} f_{rot} + f_{vibr} \right) \quad (10.23)$$

$$c_{m,V} = 3R = 24,94 \frac{J}{mol \cdot K} \quad (\text{für Festkörper}) \quad (10.24)$$

$$c_{m,p} = c_{m,V} + R \quad (\text{für ideales Gas}) \quad (10.25)$$

Adiabatenkoeffizient:

$$\kappa = \frac{c_{m,p}}{c_{m,V}} \stackrel{\text{id. Gas}}{=} \frac{f+2}{f} \quad (10.26)$$

Zusammenstellung der Größen und Beziehungen:

	ohne $T$	ohne $p$	ohne $V$	$\Delta E_{\text{mech}}$	$\Delta Q$
isochor	$V_1 = V_2$	$V_1 = V_2$	$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$	0	$c_V m (T_2 - T_1)$
isobar	$p_1 = p_2$	$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$	$p_1 = p_2$	$-p(V_2 - V_1)$	$c_p m (T_2 - T_1)$
isotherm	$p_1 V_1 = p_2 V_2$	$T_1 = T_2$	$T_1 = T_2$	$-nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$	$nRT \ln \frac{V_2}{V_1}$
adiabat	$p_1 V_1^\kappa = p_2 V_2^\kappa$	$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa-1}$	$\frac{p_1^{\frac{1}{\kappa}}}{T_1^\kappa} = \frac{p_2^{\frac{1}{\kappa}}}{T_2^\kappa}$	$c_V m (T_2 - T_1)$	0

Volumenausdehnungskoeffizient:

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (10.27)$$

Kompressibilität:

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial p} \right)_T \quad (10.28)$$

## 10.10 Kreisprozesse

Carnot'scher Wirkungsgrad für Wärmekraftmaschine:

$$\eta_C = \frac{W_{\text{nutz}}}{Q_{\text{zu}}} = \frac{T_w - T_k}{T_w} \quad (10.29)$$

Carnot'scher Wirkungsgrad für Wärmepumpe:

$$\eta_{WP} = \frac{\text{bei } T_2 \text{ abg. Wärme}}{\text{aufg. Arbeit}} = \frac{T_2}{T_2 - T_1} \quad (10.30)$$

## 10.11 Enthalpie

Zustandsfunktion der Enthalpie:

$$H = U + pV \quad (10.31)$$

Joule-Thomson Effekt:

$$\mu = \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_H \quad (10.32)$$

$\mu > 0 \rightarrow$  Abkühlung bei Druckverminderung

$\mu = 0 \rightarrow$  Inversionstemperatur

### 10.12 Entropie

Definition über die Zustandswahrscheinlichkeit:

$$S = k_B \ln(\text{Wahrscheinlichkeit des Zustandes}) \quad (10.33)$$

Entropieänderung:

$$dS \geq \frac{dQ}{T} \quad ('=' \text{ bei reversiblen Prozeß}) \quad (10.34)$$

Entropie des idealen Gases (reversibel):

$$S = C_V \ln T + nR \ln V + S_0 \quad (10.35)$$

Entropiezunahme bei Wärmeübergang:

$$dS = |dQ| \left( \frac{1}{T_k} - \frac{1}{T_w} \right) \geq 0 \quad (10.36)$$

### 10.13 Freie Energie

$$F = U - TS \quad (10.37)$$

Die Freie Energie hat im Gleichgewicht einen minimalen Wert.

### 10.14 Transportprozesse

Definition der Wärmestromdichte und Wärmeleitung:

$$\vec{q} = \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} = -\lambda \nabla T \quad [q] = \frac{W}{m^2} \quad (10.38)$$

Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T \quad (10.39)$$

Wärmedurchgang:

$$\dot{Q} = k A \Delta T \quad (10.40)$$

$$\frac{1}{k} = \sum_i \frac{1}{\alpha_i} + \sum_j \frac{l_j}{\lambda_j} \quad (10.41)$$

Streuung ( $n$  Teilchendichte,  $\sigma$  Wirkungsquerschnitt):

$$\dot{N}(x) = \dot{N}_0 e^{-n\sigma x} \quad (10.42)$$

Freie Weglängen:

- in Festkörpern und Flüssigkeiten:  $\bar{l} = \frac{1}{n\sigma}$  sowie  $\bar{l}^2 = 2\bar{l}^2 = \frac{2}{(n\sigma)^2}$
- in Gasen:  $\bar{l} = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$

Teilchenstromdichte  $\vec{j}$  bei Diffusion:

$$\vec{j} = -D\nabla n \quad [j] = \frac{1}{m^2 s}; \quad [D] = \frac{m^2}{s} \quad (10.43)$$

Diffusionsgleichung:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n \quad (10.44)$$

Teilchenverteilung durch Diffusion:

$$n(x, t) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (10.45)$$

$$\rightarrow \bar{x}^2 = 2Dt \quad (10.46)$$

$$D = \frac{1}{3}\bar{v}\bar{l} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{k_b T}{\pi m}} \frac{k_b T}{p\sigma} \quad (10.47)$$

### 10.15 Einstein Relation und Viskosität von Gasen

Kraft auf Teilchen führt zu Driftgeschwindigkeit ( $B$  Beweglichkeit):

$$\vec{v}_{\text{Drift}} = B\vec{F} \quad (10.48)$$

$$B = \frac{1}{6\pi\eta R} \quad R = \text{Kugelradius} \quad (10.49)$$

Zusammenhang mit Diffusionskonstante:

$$D = Bk_B T \quad (10.50)$$

Viskosität von Gasen:

$$\eta = \frac{1}{3}nm\bar{v}\bar{l} = Dnm = \frac{2}{3\sigma}\sqrt{\frac{mk_B T}{\pi}} \quad (10.51)$$

### 10.16 Wärmestrahlung

Strahlungsleistung ( $A$  Oberfläche,  $\epsilon$  Emmisionsgrad  $\leq 1$ ):

$$P = \epsilon\sigma AT^4 \quad (10.52)$$

Stefan Boltzmann Konstante  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{\pi^2}{60} \frac{k_B^4}{\hbar^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (10.53)$$

## 11 Elektrostatik

### 11.1 Coulomb-Gesetz und elektrisches Feld

Coulomb-Gesetz:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2 \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad (11.1)$$

Elektrische Feldkonstante (Dielektrizitätskonstante):

$$\epsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm} = \frac{1}{c^2 \mu_0} \quad (11.2)$$

Das elektrische Feld ( $\rho(\vec{r})$  Ladungsdichte):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad (11.3)$$

### 11.2 Elektrisches Potential

Elektrisches Potential:

$$\Phi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} d\vec{r}' \vec{E}(\vec{r}') \quad [\Phi] = V \quad (11.4)$$

$$\vec{E} = -\nabla\Phi \quad (11.5)$$

Potentielle Energie einer Ladung im elektrischen Feld:

$$E_p = \Phi Q \quad (11.6)$$

Potentiale:

- einer Punktladung:  $\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$
- einer Ladungsdichte:  $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

### 11.3 Feld eines elektrischen Dipols

Dipolmoment:

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad (11.7)$$

Potential und el. Feld des Fernfeldes:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}\vec{p}}{r^3} \quad \text{Abfall mit } r^2 \quad (11.8)$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{3(\vec{r}\vec{p})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right] \quad \text{Abfall mit } r^3 \quad (11.9)$$

### 11.4 Gauß'scher Satz der Elektrostatik

ohne Dielektrika:

$$\epsilon_0 \oint_{\mathbb{F}} \vec{E} d\vec{f} = \oint_V \rho dV \quad (11.10)$$

mit Dielektrika (siehe Abschnitt 11.6):

$$\oint_{\mathbb{F}} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{f} = \oint_{\mathbb{F}} \vec{D} d\vec{f} = \oint_V \rho dV \quad (11.11)$$

Elektrisches Feld einer unendlich ausgedehnten ebenen Ladungsschicht:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (11.12)$$

### 11.5 Kapazitäten

Plattenkondensator:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (11.13)$$

$$C = \frac{Q}{U} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (11.14)$$

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A} = \frac{1}{2d} C U^2 \quad (11.15)$$

Kugelkondensator:

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{R_{<}} - \frac{1}{R_{>}} \right) \quad (11.16)$$

Energie des E-Feldes:

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C U^2 \quad (11.17)$$

Energiedichte des E-Feldes:

$$W(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E(\vec{r})^2 \quad (11.18)$$

### 11.6 Isolatoren, Dielektrika, Dipole

induziertes Dipolmoment ( $\alpha$  atomare Polarisierbarkeit):

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E} \quad (11.19)$$

Drehmoment und potentielle Energie eines permanenten Dipols im E-Feld:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (11.20)$$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} \quad (11.21)$$

Kraft auf Dipol im inhomogenen E-Feld:



$$\vec{F} = (\vec{p}\nabla)\vec{E}(r) \quad (11.22)$$

Polarisation ( $n$  polarisierbare Atome pro Volumen,  $\sigma_p$  Oberflächenladung):

$$\vec{P} = n\vec{p} = \sigma_p \quad (11.23)$$

bei proportionalem Zusammenhang zwischen  $\vec{P}$  und  $\vec{E}$  ( $\chi_e$  el. Suzeptibilität):

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (11.24)$$

Dielektrizitätszahl:

$$\epsilon_r = \frac{C_{\text{mit}}}{C_{\text{ohne}}} = 1 + \chi_e \quad (11.25)$$

Elektrische Flußdichte (siehe auch Gauß'scher Satz, Gl. 11.11):

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi_e \epsilon_0 \vec{E} \quad (11.26)$$

Feldenergiedichte im Dielektrikum:

$$w = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E} \quad (11.27)$$

Frequenzabhängigkeit der Polarisierbarkeit ( $\gamma$ : Dämpfung):

$$\alpha(\omega) = \frac{q^2}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (11.28)$$

Plasmafrequenz:

$$\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m_e} \Rightarrow \epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (11.29)$$

Orientierungspolarisation permanenter Dipole:

$$\vec{P} = \frac{np^2 \vec{E}}{3k_B T} \Rightarrow \chi = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{np^2}{3\epsilon_0 k_B T} \quad (11.30)$$

## 11.7 Clausius-Mossotti-Beziehung

Zusammenhang zwischen  $\chi_e$  und  $\alpha$ :

$$\chi_e = \frac{n\alpha}{1 - \frac{1}{3}n\alpha} \Rightarrow \epsilon_r = \frac{1 + \frac{2}{3}n\alpha}{1 - \frac{1}{3}n\alpha} \quad (11.31)$$

### 11.8 Elektrischer Strom

Widerstand ( $\vec{j}$  Stromdichte,  $\rho$  spez. Widerstand,  $\sigma$  spez. Leitfähigkeit):

$$\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \sigma \vec{E} \Rightarrow R = \rho \frac{l}{A} \quad (11.32)$$

$$[\vec{j}] = \frac{A}{m^2}, \quad [\rho] = \frac{Vm}{A} = \frac{\Omega}{m}$$

Leistungsdichte:

$$\frac{P}{V} = \vec{E} \vec{j} = \rho \vec{j}^2 = \frac{\vec{E}^2}{\rho} \quad (11.33)$$

Kirchhoff'sche Gesetze:

- *Knotenregel*: An einem Punkt ist die Summe aller zu- und wegfließenden Ströme gleich null.
- *Maschenregel*: Entlang einer geschlossenen Masche ist die Summe aller Potentialänderungen gleich null.

Auf- und Entladung eines Kondensators:

$$\text{Aufladung: } U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (11.34)$$

$$\text{Entladung: } U = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (11.35)$$

Mikroskopisches Modell für das ohmsche Gesetz ( $\tau$  freie Flugzeit):

$$\text{Driftgeschwindigkeit: } \vec{v}_D = -\frac{e\vec{E}}{m}\tau \quad (11.36)$$

$$\text{Leitfähigkeit: } \sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{e^2 N \tau}{mV} = \frac{e^2 n \tau}{m} \quad (11.37)$$

$$\text{Beweglichkeit: } \mu = \frac{v_D}{E} = -\frac{e\tau}{m} = -\frac{\sigma}{ne} \quad (11.38)$$

Faraday Konstante:  $F = N_A e = 96484,56 \text{ C}$

Richardson-Gleichung (Zahl der austretenden  $e^-$  pro Sekunde und Fläche):

$$j_s = CT^2 e^{-\frac{\Phi}{k_b T}} \quad (11.39)$$

## 12 Magnetostatik

### 12.1 Stationäre Ströme

Die zwei Maxwell-Gleichungen für die Magnetostatik:

$$\oint_{\text{geschl. Oberfläche}} \vec{B} d\vec{f} = 0 \quad (12.1)$$

$$\oint_{\text{Rand}} \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \int_F \vec{j} d\vec{f} \quad \text{Ampère Gesetz} \quad (12.2)$$

Magnetische Feldkonstante:  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

Zusammenhang zwischen magnetischer und elektrischer Feldkonstante:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (12.3)$$

## 12.2 Spezielle Felder

unendlich langer, gerade Leiter (äußeres Feld):  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

lange Spule (innerhalb der Spule):  $B = \mu_0 I \frac{N}{l}$

Koaxialleiter (zwischen den beiden Leitern):  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

Luftspalt  $d$  in Spule mit Umfang  $\approx l$ :  $B = \frac{\mu_0 IN}{d+l/\mu_r}$

## 12.3 Gesetz von Biot-Savart

Beschreibt die durch das Leiterelement  $d\vec{l}$  (in Richtung von  $\vec{I}$ ) am Ort  $\vec{r}$  differentielle Magnetfeldänderung:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} d\vec{l} \times \vec{r} \quad (12.4)$$

## 12.4 Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (12.5)$$

Zyklotronfrequenz (Kreisfrequenz einer Ladung im  $B$ -Feld):

$$\vec{\omega}_Z = -\frac{\vec{B}Q}{m} \quad (12.6)$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter:

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \quad (12.7)$$

## 12.5 Hall-Effekt

$$U_H = R_H \frac{BI}{d} \quad (12.8)$$

$d$ : Länge des Sensors in Feldrichtung,  $R_H = \frac{1}{nQ}$ : Hallkonstante

## 12.6 Magnetische Dipole

Dipolmoment ( $P$ : Polstärke):

$$\vec{m} = I \vec{A} (= P \vec{l}) \quad (12.9)$$

Drehmoment auf Dipol (homogenes Feld):

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (12.10)$$

Kraft auf Dipol (inhomogenes Feld):

$$\vec{F} = (\vec{m} \nabla) \vec{B}(\vec{r}) \quad (12.11)$$

Kraft durch Polstärke:

$$\vec{F} = P\vec{B} \quad \rightarrow \quad F = \frac{\mu_0 P^2}{4\pi r^2} \quad (12.12)$$

Potentielle Energie:

$$E_{pot} = -\vec{m}\vec{B} \quad (12.13)$$

Kraft zwischen zwei Dipolen ( $\vec{m}_1 || \vec{m}_2$ ):

$$F(x) = -\frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\pi} \frac{m^2}{x^4} \quad (12.14)$$

## 12.7 Materie im magnetischen Feld

Magnetisierung ( $n$ : Dipoldichte):

$$\vec{M} = n\vec{m} \quad (12.15)$$

Ampèresches Gesetz bei Magnetisierung:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad \rightarrow \quad \oint (\vec{B} - \mu_0\vec{M}) d\vec{s} = \mu_0 I \quad (12.16)$$

Magnetische Suszeptibilität:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad \rightarrow \quad \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \quad (12.17)$$

Diamagnetismus ( $\chi_m < 0$ ):

$$\chi_m = -\frac{\mu_0 n Z e^2}{2m} \frac{1}{x^2} \quad (12.18)$$

Paramagnetismus ( $\chi_m > 0$ ):

$$\chi_m = \frac{\mu_0}{3} \frac{n m^2}{k_b T} \quad (12.19)$$

Magnetische Stoffe:

- Ferromagnetismus: parallele Ausrichtung der  $\vec{m}$
- Antiferromagnetismus: antiparallele Ausrichtung
- Ferrimagnetismus: antiparallele Ausrichtung ungleicher Momente

## 12.8 Zusammenfassung und Vergleich

Einheiten:

$E : \frac{V}{m}$	$D : \frac{As}{m^2}$	$U : [V]$	$q : [As]$	$p : [Asm]$	$\epsilon_0 : [\frac{As}{Vm}]$
$H : \frac{A}{m}$	$B : \frac{Vs}{m^2}$	$I : [A]$	$\mu_0 P : [Vs]$	$\mu_0 m : [Vsm]$	$\mu_0 : [\frac{Vs}{Am}]$

Maxwell:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} & \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \times \vec{E} &= -\frac{d}{dt} \vec{B} \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H} & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= +\frac{d}{dt} \vec{D} + \vec{j} \end{aligned}$$

mit Materie:

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_{el}) \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} &= \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})\end{aligned}$$

## 12.9 Feldübergang an einer Grenzfläche

Stetigkeitsbetrachtung senkrecht und parallel zur Grenzfläche:

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad H_{1\perp} \mu_1 = H_{2\perp} \mu_2 \quad (12.20)$$

$$H_{1\parallel} = H_{2\parallel} \quad B_{1\parallel} \mu_2 = B_{2\parallel} \mu_1 \quad (12.21)$$

# 13 Zeitlich veränderliche Magnetfelder

## 13.1 Induktion

Induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}} = \oint_{\partial F} \vec{E} d\vec{s} = -\dot{\phi} = -\int_F \vec{B} d\vec{f} \quad (13.1)$$

Spannungsstoß:

$$\int U dt = -\vec{A} \vec{B} \quad (13.2)$$

Selbstinduktion:

$$U_{\text{ind}} = -L \dot{I} \quad (13.3)$$

Selbstinduktion einer langen Spule:  $L = \mu A \frac{N^2}{l}$

Selbstinduktion eines Koaxialkabels:  $L = \mu \frac{l}{2\pi} \ln \frac{R}{r}$

Einschalt- und Ausschaltvorgang bei Spule:

$$\begin{aligned}\text{Einschalten : } I(t) &= \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) \\ \text{Ausschalten : } I(t) &= I_0 e^{-\frac{R}{L}t}\end{aligned} \quad (13.4)$$

Wechselstromgenerator:

$$U_{\text{ind}} = NBA\omega \sin(\omega T) \quad (13.5)$$

## 13.2 Energie des magnetischen Feldes

Energiedichte allgemein:

$$dw = \frac{dW}{V} = H dB \quad (13.6)$$

Integriert für  $\mu = \text{const}$ :

$$w_{\text{magn.}} = \frac{\mu}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu} \quad (13.7)$$

Die Energiedichte ist auch gerade gleich dem Druck auf die Leiteroberfläche, wobei er so gerichtet ist, daß die umschlossene Fläche maximiert wird.

Durch Induktivität gespeicherte Energie:

$$W = \frac{1}{2}LI^2 \quad (13.8)$$

### 13.3 Transformator

Spannungsverhältnis:

$$U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1 \quad (13.9)$$

Strom an Primärseite ( $R$ : Last an Sekundärseite):

$$I = \frac{U_0}{\omega L_1} \sin(\omega t) + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) \quad (13.10)$$

Gemittelte Leistungsabgabe:

$$\overline{P} = \frac{1}{2} \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \frac{U_0^2}{R} \quad (13.11)$$

### 13.4 Supraleitung

Abnahme eines Dauerstromes in Ringleitung:

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t} \quad (13.12)$$

Flußquantisierung ( $q$ : Ladung eines Ladungsträgers):

$$\phi_0 = \frac{h}{q} \quad h = 6,626176 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (13.13)$$

Kritisches Magnetfeld (Phasendiagramm):

$$B_C(T) \approx B_{C_0} \left(1 - \frac{T^2}{T_C^2}\right) \quad (13.14)$$

Supraleiter ist perfekter Diamagnet  $\Rightarrow \chi_m = -1$

London Gleichung ( $n_s$ : Sättigungsteilchendichte der supraleitenden  $e^-$ ):

$$\nabla \times \vec{j} + \frac{n_s e^2}{m} \vec{B} = 0 \quad (13.15)$$

Eindringtiefe des magnetischen Feldes (London'sche Eindringtiefe):

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}} \quad (13.16)$$

## 14 Wechselstromkreis

### 14.1 Strom, Spannung und ohmscher Widerstand

Effektivwerte:

$$U_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0, \quad I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0 \quad (14.1)$$

Leistung bei reinem ohmschen Widerstand:

$$P(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) \Rightarrow \overline{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2}{R} \quad (14.2)$$

### 14.2 Induktivität und Kapazität

Induktiver Widerstand (Strom hinkt der Spannung hinterher):

$$X_L = \omega L \quad (14.3)$$

Kapazitiver Widerstand (Strom eilt der Spannung voraus):

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (14.4)$$

Leitwert  $Y$ : Jeweils der Kehrwert von  $X_L$  und  $X_C$ .

Impedanz (komplexer Gesamtwiderstand):

$$X = R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (14.5)$$

Phasenverschiebung:

$$\varphi = -\arctan \left( \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \Rightarrow I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (14.6)$$

### 14.3 Schwingkreis

Eigenfrequenz des ungedämpften Schwingkreises:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (14.7)$$

DGL ( $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ ,  $\tau = \frac{L}{R}$ ):

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = 0 \quad (14.8)$$

Erzwungene Schwingungen (mit Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ):

$$|I_0| = \frac{U_0 \omega}{L \sqrt{\frac{\omega^2}{\tau^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2}} \quad \varphi = \arctan \left( \frac{\tau}{\omega} (\omega_0^2 - \omega^2) \right) \quad (14.9)$$

## 15 Elektromagnetische Wellen

### 15.1 Allgemeine Lösung der Maxwellgleichungen

Wellengleichung:

$$\ddot{\vec{E}} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} \Delta \vec{E} \quad \ddot{\vec{B}} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} \Delta \vec{B} \quad (15.1)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c}{n} \quad (15.2)$$

### 15.2 Monochromatische Wellen

Lösung der Wellengleichung  $((\vec{E} \perp \vec{B}) \perp \vec{k})$ :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} \quad \vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \vec{B}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} \quad (15.3)$$

Wellenlänge und Winkelgeschwindigkeit:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \omega = \frac{c}{n} k \quad (15.4)$$

Zusammenhang zwischen  $E$ - und  $B$ -Feld:

$$\vec{k} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \omega \vec{B}(\vec{r}, t) \Rightarrow B = \frac{n}{c} E = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r} E \quad (15.5)$$

### 15.3 Energie, Poynting, Impuls

Energiedichte im Vakuum:

$$u(t) = \frac{1}{2} (ED + HB) = \epsilon \epsilon_0 E^2 = \mu \mu_0 H^2 = \frac{B^2}{\mu \mu_0} \Rightarrow \bar{u} = \frac{1}{2} \epsilon \epsilon_0 E^2 \quad (15.6)$$

Poynting Vektor (Energiefluß):

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \Rightarrow S = c u \quad [S] = \frac{W}{m^2} \quad (15.7)$$

Impulsdichte  $\vec{j}_S$  und Drehimpulsdichte  $\vec{l}_S$ :

$$\vec{j}_S = \frac{\vec{S}}{c^2} \quad \vec{l}_S = \frac{u}{\omega^2} \vec{\omega} \quad (15.8)$$

### 15.4 Strahlung des Hertz'schen Dipols

Felder in Polarkoordinaten ( $p$ : Dipolmoment):

$$E_\theta = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \sin(\theta)}{c^2 r} \quad B_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \sin(\theta)}{cr} \quad (15.9)$$

Poynting Vektor für diese Felder zeitlich gemittelt:



$$\overline{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{8\pi c^3 r^2} \sin^2(\theta) \quad (15.10)$$

Abgestrahlte Leistung:

$$\overline{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_0^2 \omega^4}{3c^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\overline{p^2} \omega^4}{3c^3} \quad (15.11)$$

## 15.5 Brechung, Dispersion und Reflexion

Brechung (Snellius'sches Brechungsgesetz):

$$\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_2)} = \frac{n_2}{n_1} \quad (15.12)$$

Totalreflexion (beim Übergang von optisch dichtem zu optisch dünnem Medium):

$$\sin(\alpha_T) = \frac{n_{\text{dünn}}}{n_{\text{dicht}}} \quad (15.13)$$

Modell für Brechzahl ( $\rho$ : Elektronendichte,  $\alpha$ : vgl. (11.28)):

$$n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\epsilon_r} = \sqrt{1 + \rho \alpha(\omega)} \quad (15.14)$$

Phasengeschwindigkeit:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} \quad (15.15)$$

Gruppengeschwindigkeit (vgl. (9.18)):

$$v_g = \frac{v}{1 + \frac{kv}{n} \frac{dn}{d\omega}} \quad (15.16)$$

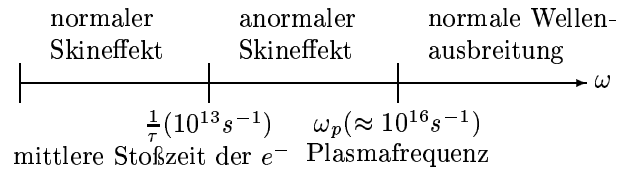
normale Dispersion:  $v_g < v \rightarrow \frac{dn}{d\omega}, \frac{d\epsilon_r}{d\omega} > 0$

anormale Dispersion:  $v_g > v \rightarrow \frac{dn}{d\omega}, \frac{d\epsilon_r}{d\omega} < 0$

Reflexionskoeffizient bei senkrechtem Einfall:

$$r = \frac{S_R}{S_E} = \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \quad (15.17)$$

## 15.6 Elektromagnetische Wellen in Metallen



**Normaler Skineffekt** Formal wird  $\epsilon_r$  ersetzt durch  $\epsilon_r + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon_0}$   
Komplexe Brechzahl:

$$n = \sqrt{i \frac{\sigma \mu_r}{\omega \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma \mu_r}{2\omega \epsilon_0}} + i \sqrt{\frac{\sigma \mu_r}{2\omega \epsilon_0}} =: n_r + i\kappa \quad (15.18)$$

Komplexer Wellenvektor:

$$k = n \frac{\omega}{c} = n_r \frac{\omega}{c} + i\kappa \frac{\omega}{c} \quad (15.19)$$

Eindringtiefe in Metall ( $\vec{E} \sim e^{-\frac{x}{d}}$ ):

$$d = \frac{c}{\kappa \omega} = c \sqrt{\frac{2\epsilon_0}{\sigma \omega}} \quad (15.20)$$

**Anormaler Skineffekt**  $\epsilon_r$  wird durch  $\epsilon_r$  des Plasmas  $\epsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$  ersetzt  
Komplexe Brechzahl:

$$n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx i \frac{\omega_p}{\omega} \approx i\kappa \quad (15.21)$$

Eindringtiefe (in erster Näherung frequenzunabhängig, bewirkt Totalreflexion):

$$d = \frac{c}{\kappa \omega} = \frac{c}{\omega_p} = \frac{c}{e} \sqrt{\frac{\epsilon_0 m_e}{\rho}} \quad (15.22)$$

**Normale Wellenausbreitung** reelle Brechzahl  $\Rightarrow$  Metall wird durchsichtig  
Brechzahl:

$$\begin{aligned} \omega > \omega_p & \quad n = 1 + \frac{\rho e^2}{2m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \\ \omega \gg \omega_p & \quad n = 1 - \frac{\rho e^2}{2m\epsilon_0\omega^2} \end{aligned} \quad (15.23)$$

## 15.7 Wellenleitung

Telegraphengleichung für Koaxialkabel:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \quad (15.24)$$

Ausbreitungsgeschwindigkeit:  $v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{c}{n}$

Hohlleiter ( $a_1, a_2$ : Abmessungen; für  $\omega > \pi c \sqrt{a_1^{-2} + a_2^{-2}}$ ):

$$v = \frac{\omega}{k} = c (1 - c^2 \pi^2 \omega^{-2} (n_1^2 a_1^{-2} + n_2^2 a_2^{-2}))^{-\frac{1}{2}} \quad (15.25)$$

### 15.8 Streuung und Polarisation

An Atom mittlere abgestrahlte Leistung ( $\omega_0$ : Eigenfrequenz des Atoms):

$$\langle P \rangle = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e^2\omega^4}{3c^3} \frac{|E_0|^2 e^2}{2m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (15.26)$$

Daraus resultierender Wirkungsquerschnitt ( $\sigma_{th}$ : Thomson-Wirkungsquers.):

$$\sigma = \frac{\langle P \rangle}{\langle S \rangle} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0^2} \frac{e^2}{c^4 m^2} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (15.27)$$

$$\sigma_{th} \approx 0,67 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 \Rightarrow \sigma = \sigma_{th} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad (15.28)$$

Folge:  $\sigma \sim \omega^4 \sim \lambda^{-4} \rightarrow$  Blaues Licht wird stärker gestreut als rotes.

Abnahme der Intensität durch Streuung:

$$\langle S(x) \rangle = \langle S_0 \rangle e^{-n\sigma x} \quad (15.29)$$

**Polarisation:** Die *Polarisationsrichtung* ist parallel zum elektrischen Feldvektor, die *Polarisationsebene* liegt senkrecht dazu.

Brewsterwinkel (Reflektiertes Licht ist  $\perp$  zur Einfallsebene polarisiert):

$$\tan \alpha_B = n \quad (15.30)$$

### 15.9 Interferenz und Beugung

Intensität bei Überlagerung zweier Strahlen:

$$\langle A^2 \rangle = \frac{1}{2} A_1^2 + \frac{1}{2} A_2^2 + A_1 A_2 \langle \cos(k_2 r_2 - k_1 r_1 - (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1) \rangle \quad (15.31)$$

Intensitätsmaxima bei verschiedenen Gittern:

- Doppelspalt (jeweils schmal):  $g \sin(\alpha_n) = n\lambda$
- Einfacher Spalt:  $b \sin(\alpha_n) = (n + \frac{1}{2})\lambda$
- Gitter:  $g \sin(\alpha_n) = n\lambda$
- Lochblende:  $\sin(\alpha_z) = \frac{z\lambda}{2R}, z = 1.22, 2.24, 3.24, \dots$

Beugung am allg. Gitter ( $b$ : Spaltbreite,  $g$ : Abstand,  $N$ : Anzahl Spalte):

$$I = A_0^2 \left( \frac{1}{X} \sin(X) \right)^2 \left( \frac{\sin(NY)}{\sin(Y)} \right)^2 \quad (15.32)$$

wobei  $X = \frac{\pi b}{\lambda} \sin(\alpha), \quad Y = \frac{\pi g}{\lambda} \sin(\alpha)$

Die Intensität der Maxima ist proportional zu  $N^2$  und das erste Minimum kommt nach  $\Delta(\sin \alpha) = \frac{\lambda}{N_g}$ .

Bragg Bedingung für konstruktive Interferenz am Gitter ( $d$ : Abstand der Gitterebenen,  $\theta$ : Winkel zur Ebene):

$$2 d \sin(\theta) = n\lambda, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (15.33)$$

## 16 Optik und Strahlung

### 16.1 Abbildungssysteme

Brennweite von Kugelhohlspiegeln ( $r$  negativ für konvexe Spiegel):

$$f = \frac{r}{2} \quad (16.1)$$

Linsenmacherformel ( $r$  negativ für konvexe Linsenhälften):

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (16.2)$$

Addition von Brennweiten ( $d$ : Abstand der Hauptebenen):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (16.3)$$

Abbildungsgleichungen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b} \quad (16.4)$$

$$V = \frac{B}{G} = \frac{b - f}{f} = \frac{f}{g - f} \quad (16.5)$$

### 16.2 Auflösungsvermögen

Rayleighsches Kriterium ( $\delta$ : Öffnungswinkel,  $D$ : Blendendurchmesser):

$$\sin \delta \geq 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (16.6)$$

Auflösung nach Abbe ( $d$ : minimaler Abstand zweier Objektpunkte,  $A$ : numerische Apertur,  $\alpha$  halber Öffnungswinkel,  $n$ : Brechzahl, Objekt im Brennpunkt):

$$d = \frac{\lambda}{A}, \quad A = n \sin \alpha \quad (16.7)$$

### 16.3 Hohlraumstrahlung

Planck-Gesetz (Energiedichte bei Frequenz  $\nu$  und Temperatur  $T$ ):

$$\rho(\nu, T) d\nu = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} d\nu \quad (16.8)$$

Wien-Verschiebungsgesetz (Frequenz für Maximum der Strahlungsdichte):

$$\nu_m = \frac{2,82k_B}{h}T = 5,88 \cdot 10^{10} \frac{Hz}{K}T \quad (16.9)$$

Stefan-Boltzmann-Gesetz (gesamte abgestrahlte Leistung pro Fläche):

$$R(T) = \frac{4\pi^5}{15} \frac{k_B^4}{c^2 h^3} T^4 = 11,34 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} T^4 \quad (16.10)$$

Abgestrahlte Leistung nach einer Seite ( $\sigma$ : Stefan-Boltzmann-Konstante):

$$P = \sigma A T^4 \quad \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (16.11)$$