

Der paradoxe Eierkocher - Versuchsprotokoll

F. Greil J. Hofmann F. Schäfer

10. September 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Das Problem	2
2	Die Geschichte	2
3	Versuchsbeschreibung	2
4	Vorüberlegungen	3
4.1	Abstand der Eichstriche des Meßbechers	3
4.2	Verwendete Größen	3
4.3	Zusammensetzung eines Eies	3
4.4	Gewichtsklassen bei Hühnereiern	3
5	Durchführung und Auswertung	4
5.1	Prinzip des Eierkochers	4
5.2	Praktisches Eierkochen	5
5.3	Modelle für ein Standardei	6
5.3.1	Berechnung der Oberfläche eines Eies	7
5.3.2	Kugeln als Ei-Modelle	7
5.3.3	Eiern mit integrierten Meßfühlern	7
5.3.4	Zielvorgabe für die Benutzung des Standardeies	8
5.3.5	Suche nach dem Standardei	8
5.3.6	Standardei: Kugeln aus V2A-Stahl	8
5.4	Fehlerbetrachtung	9
6	Verwendung im Physikalischen Grundpraktikum	10
6.1	Das bisherige Verfahren in der Übersicht	10
6.2	Voraussetzungen	11
6.3	Anforderungen	12
6.4	Durchführung	12
6.5	Lernziele	12
7	Anhang: Herleitung der Formel	13
8	Anhang: Messwerte	14
8.1	Maße der verwendeten Probekörper	14
8.1.1	Eier der Versuche am 05.01.01	14
8.1.2	Eier der Versuche am 26.01.01	14
8.2	Ergebnisse des Standardverfahrens	14
8.3	Bestimmung des Gewichtsverlustes	14

1 Das Problem

Es gibt vielerlei Wege zu einem Frühstücksei zu kommen. Neben der traditionellen Methode, bei der die Eier einfach in einem Topf Wasser gekocht werden, gibt es spezielle Küchengeräte dafür: Die Eier stehen in einem Rost über einer Verdampferschale und werden durch den sie umströmenden Wasserdampf erhitzt. Sobald das Wasser zum größten Teil verdampft ist, löst ein Bimetallschalter einen Summer aus und unterbricht die Stromzufuhr zu der Heizplatte. Die Eier sind fertig. Je nachdem, ob man harte, mittelharte oder weiche Eier bevorzugt, gießt man mehr oder weniger Wasser in die Verdampferschale. Erwartungsgemäß benötigt man für harte Eier mehr Wasser als für weiche Eier. Doch betrachtet man den beiliegenden Meßbecher genauer, so stellt man fest: Bei gleichem gewünschtem Härtegrad braucht man für mehr Eier weniger Wasser. Dies erscheint paradox.

2 Die Geschichte

Wolfgang Bürger, Professor für Mechanik an der Universität Karlsruhe, hat sich damit in seinem Buch “Der paradoxe Eierkocher” beschäftigt und eine Theorie entwickelt. Deren Gültigkeit ist zu prüfen, denn er schreibt selbst: “Die Ergebnisse sind nur qualitativ richtig. Quantitative Übereinstimmung von Rechnung und Beobachtung wären bei den der Theorie zugrunde liegenden Vereinfachungen ein Zufallsergebnis.”

3 Versuchsbeschreibung

Die verdampfte Wassermenge in Gramm wird über der verstrichenen Zeit in Sekunden dargestellt, obwohl der Versuchsgang eigentlich andersherum ist: Zu vorgegebener Wassermenge wird die Zeit gemessen. Dabei werden folgende Regeln befolgt.

- Alle Eier sind bereits hartgekocht, denn es hat sich herausgestellt, dass der Unterschied zwischen rohen und hartgekochten Eiern keine nennenswerte Auswirkungen auf die Kochzeit hat und die Eier so mehrfach verwendet werden können.
- Der Originaldeckel, der dem Wasserdampf nur ein kleines Austrittsloch lässt und dadurch Umgebungsverluste minimiert, wird bei den Messungen verwendet.
- Der Eierkocher wird so aufgestellt, dass möglichst wenig Wasser übrigbleibt, wenn der Summer ertönt. Diese Position wird beibehalten.
- Die Kochplatte wird vorgewärmt, denn die Erwärmungszeit ist uninteressant, weil sie jedesmal die selbe ist. Definitionsgemäß ist der Zustand “vorgewärmt” dann erreicht, wenn der Summer ertönt, dadurch bekommt man einen reproduzierbaren Anfangszustand. Der Aufheizvorgang findet ohne Wasser in der Verdampferschale statt.
- Das verwendete Wasser wird bis zum Siedepunkt erhitzt, bevor es in die Verdampferschale gefüllt wird, da so die Starttemperatur einigermaßen reproduzierbar ist.

- Auch der Meßbecher wird durch Befüllen mit kochendem Wasser vorgewärmt, erneut gefüllt und die Wassermasse gewogen.
- Es hat sich bewährt, dass eine Person die Kombination Deckel-Eier-Rost bereithält, während die andere Person den Meßbecher samt Inhalt wiegt, die Waage kalibriert, das Wasser in die Verdampferschale gießt und das Gerät einschaltet und erst im Nachhinein die Wassermenge durch Differenzmessung zum leeren Meßbecher bestimmt.
- Ab dem Einschalten beginnt die Zeitmessung und sie endet mit dem Summen.

4 Vorüberlegungen

4.1 Abstand der Eichstriche des Meßbechers

In Bürgers Theorie wird von “gleichen Strichabständen” gesprochen, die auf den im Versuch verwendeten Meßbechern nicht zu finden sind. Es stellt sich die Frage, ob die Abstände vom Eierkocherhersteller empirisch bestimmt worden sind.

Eierzahl	Hart/ml	Mittel/ml	Weich/ml
7	70,0	36,2	26,3
6	71,5	38,1	28,9
5	80,5	41,0	30,6
4	85,0	44,2	31,9
3	91,0	46,0	34,3
2	95,2	49,0	36,5
1	97,7	55,1	43,5

Tabelle 1: Abstand der Eichstriche auf dem Meßbecher

4.2 Verwendete Größen

4.3 Zusammensetzung eines Eies

Etwa ein Drittel eines Eies besteht aus Eidotter, zwei Drittel aus Eiklar, letzteres besteht zu 87% aus Wasser.

Erfahrungsgemäß sind Eidotter und Eiklar von gallertartiger Konsistenz und es ist die Frage offen, ob man deshalb von Konvektionsströmen absehen kann. Die im Ei vorkommenden Proteine sind Albumine, die wasserlöslich sind und eine relative Molekülmasse von 70000u besitzen. Sie denaturieren bei 65 bis 70°C. Bei der Modellierung des gekochten Eies kann man das Ei als “gar” definieren, sobald diese Temperatur im Inneren für eine gewisse Zeit überschritten wird.

4.4 Gewichtsklassen bei Hühnereiern

Bis vor einigen Jahren benutzte man sogenannte Klassen für die Spezifikation von handelsüblichen Eiern:

Inzwischen gelten nach EU-Richtlinie die Bezeichnungen S, M, L und XL:

Größe	Bedeutung	Wert
P	Nennleistung des Eierkochers	350 W
m_0	Masse des Wassers	
n	Zahl der Eier	
A	Oberfläche des Eies	76,62cm ²
q	Wärmestrom	
r	spezifische Verdampfungsenthalpie	2256 J · g ⁻¹
c	spezifische Wärmekapazität	3,3 J · g ⁻¹ K ⁻¹
λ	Wärmeleitfähigkeit	0,005 W · cm ⁻¹ K ⁻¹
R	Radius der volumengleichen Kugel	2,4cm
M	Masse des Eies	62,5g
T_S	Sättigungstemperatur	100°C
T_0	Temperatur des Eies vor dem Erhitzen	20°C
t_E	Kochzeit (ohne Aufheizzeit)	

Tabelle 2: Verwendte Größen

Klasse	1	2	3	4	5	6	7
Masse	ab 70g	ab 65g	ab 60g	ab 55g	ab 50g	ab 45g	unter 45g

Tabelle 3: Gewichtsklassen bei Hühnereiern

Klasse	XL	L	M	S
Mindestwert des Durchschnitts/g	73	64	54	45
Spanne/g	>73	53-63	53-63	<53

Tabelle 4: EU-Richtlinie

5 Durchführung und Auswertung

5.1 Prinzip des Eierkochers

Der Zustand des Wasserdampfes lässt sich durch Druck, Temperatur und Volumen beschreiben. Der Druck ist der Umgebungsdruck, der mit Wetteränderungen schwankt und von der Höhe abhängt. Wäre der Druck des Wasserdampfes größer als der der Umgebung würde sich der Deckel des Geräts anheben. Für eine Meßreihe innerhalb weniger Stunden sind die Umgebungsdruckänderungen vernachlässigbar klein und man kann daher von gleicher Siedetemperatur ausgehen.

Das eingefüllte Wasser wird erhitzt und verdampft; der Dampf schlägt sich auf den Eierschalen nieder, überträgt Wärmeenergie, kondensiert und fließt als Wasser in die Verdampferschale zurück. Bei größerer Eierschalenoberfläche vollführen mehr Wassermoleküle pro Zeiteinheit diesen Kreislauf; dieselbe Menge Wärmetransportmedium wird also effektiver genutzt. Der Temperaturunterschied zwischen Ei und Wasserdampf führt zu einem Wärmeübertrag vom Dampf auf das Ei. Die bei der Kondensation freigesetzte Wärme, die Verdampfungsenthalpie, erwärmt die Eier. Der Energietransport von der Kochplatte zu den Eiern erfolgt über die latente Wärme, die bei der Kondensation wieder frei wird. Weil der Dampf nicht nur an den Eiern kondensiert, sondern auch an der Deckelin-

nenseite, und weil weiterhin auch Dampf durch die Öffnung im Deckel austritt, wird die von der Heizplatte abgegebene Wärme nur teilweise auf die Eier übertragen. Die effektive Heizleistung des Eierkochers erwärmt n Eier durch den Wärmestrom q , der die in der Zeiteinheit durch die Oberfläche A eines Eies tretende Energie bezeichnet, und gleichzeitig den Dampf, der durch das Loch im Deckel entweicht.

Mit der spezifischen Verdampfungsenthalpie r lautet das Verdampfungsgesetz:

$$Q = -r \frac{dm}{dt} + nq$$

Der Wärmestrom q erhöht die Temperatur eines Eies der Masse M und der spezifischen Wärmekapazität c :

$$q = Mc \frac{dT}{dt}$$

Den Antrieb für den Wärmestrom liefert das Temperaturgefälle. Ist T_S die Sättigungstemperatur an der Eioberfläche und T die (niedrigere) Temperatur im Ei, so ergibt sich das Wärmeübergangsgesetz:

$$q = \alpha A (T_S - T)$$

Dabei lässt sich α durch die Wärmeleitfähigkeit λ und den Radius R einer volumengleichen Kugel darstellen, der Proportionalitätsfaktor ist die sogenannte Nußelt-Zahl:

$$\alpha \approx \frac{3\lambda}{R}$$

Daraus ergibt sich (nach längerer Rechnung, welche im Anhang 7 genau durchgeführt wurde und mit der Anfangstemperatur T_0) folgender Zusammenhang zwischen der Wassermenge m_0 und der Garzeit t_E (nach Abzug der Aufheizdauer):

$$m_0 = \frac{Pt_E}{r} - n \frac{Mc(T_S - T_0)}{r} \cdot \left(1 - e^{\frac{-3t_E A \lambda}{McR}}\right)$$

Für jedes zusätzliche Ei ist die Wassermenge um den gleichen Betrag zu reduzieren, die entsprechenden Kalibrierstriche müssten also auf einem zylindrischen Gefäß gleichen Abstand haben.

5.2 Praktisches Eierkochen

Die Messwerte für höhere Wassermengen liegen recht gut auf einer Geraden, bei kleineren Wassermengen streuen die Messwerte in einem großen Bereich, unabhängig davon, wieviel Eier im Rost stehen. Es ist genau das Intervall, in dem die Rückkondensation von den Oberflächen im Dampfraum (Eier, Deckelinnenseite) noch nicht begonnen hat, der Eierkocher "weiß" noch nichts von den Eiern.

Es zeigt sich, dass die theoretischen Berechnungen nur bedingt mit den praktischen Ergebnissen übereinstimmen. Die eingesetzte Messtechnik ergibt in Bereichen geringer Gesamtwassermenge keine Genauigkeit mehr, da hier Nebeneffekte überwiegen, wie z.B. das Kondensieren von Wasser an dem Deckel der Apparatur. Aus diesem Grund ist es notwendig, die theoretischen Kurven den realen Werten durch eine Verschiebung auf der Geraden für null Eier anzupassen. Durch diese Korrektur liegen die gefundenen Werte wieder recht gut auf dem erwarteten Graphen (Abb. 2, außer λ und c , Werte wie oben angegeben).

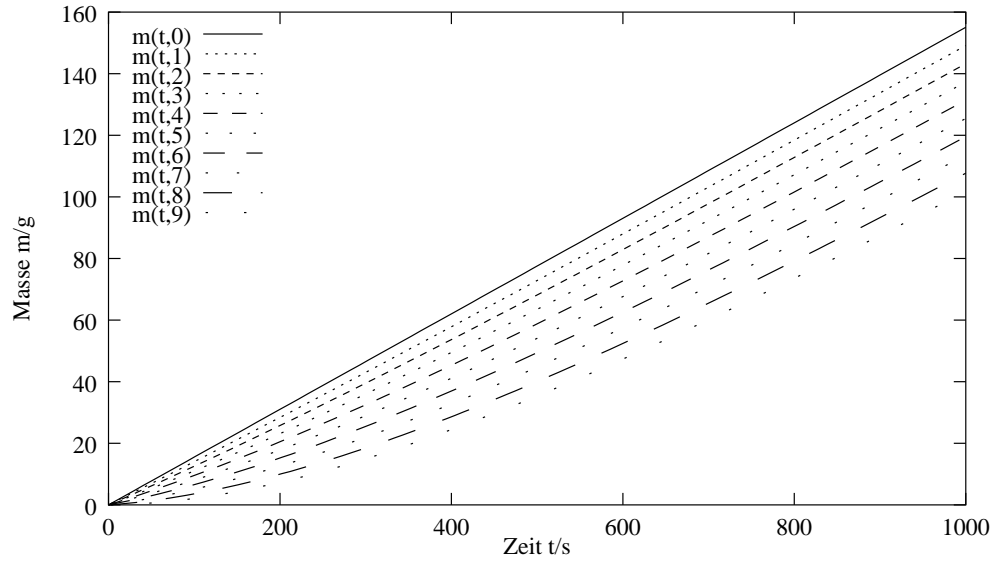


Abbildung 1: Theoretische Kurven für 0-9 Eier mit $\lambda = 0.5 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$ $c = 3.3 \frac{\text{J}}{\text{g K}}$

Allerdings musste hierzu eine nicht ganz zu vernachlässigende Anpassung der Werte für die Wärmeleitfähigkeit und die Wärmekapazität vorgenommen werden.

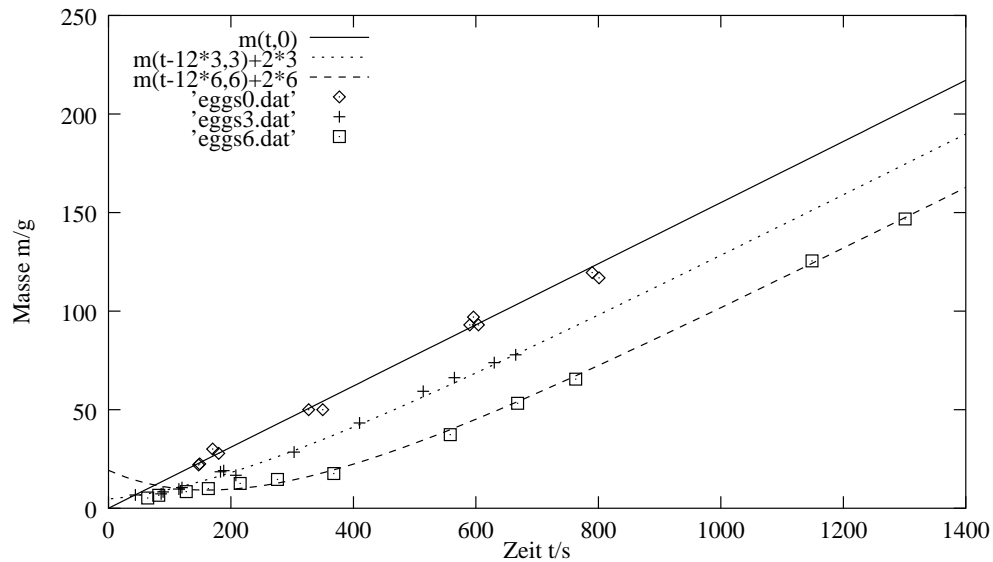


Abbildung 2: Messwerte und angepasste Kurven, wobei $\lambda = 1.2 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$ $c = 4.8 \frac{\text{J}}{\text{g K}}$

5.3 Modelle für ein Standardei

Die Eier mehrmals Kochen ist die eine Möglichkeit, ein abstraktes Modell zu entwerfen die Alternative dazu. Doch was nimmt man als Modell? Möglich wären

Eierattrappen, die zur Steigerung der Eiausbeute in Hühnerhöfen verwendet werden, Christbaumkugeln, Glühbirnen, Rundkolben, Stopfeier, kugelförmige Briefbeschwerer aus Vollglas oder Nußelt-Kugeln, letztere sind zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität hergestellte Behältnisse.

Näheren wir uns dem theoretisch idealen Modellei einmal in Schritten:

5.3.1 Berechnung der Oberfläche eines Eies

Die Oberfläche eines Eies lässt sich durch einen Rotationskörper annähern, die Oberfläche eines solchen Rotationsellipsoids ist gleich dem Produkt aus der Länge der erzeugenden Kurve und dem vom Schwerpunkt der Kurve bei der Rotation zurückgelegten Weg (1. Guldinsche Regel).

Allerdings lassen sich die dafür erforderlichen Parameter an realen Eiern nicht so ohne weiteres bestimmen. Über die von außen bestimmbaren Maße kann die Oberfläche über Integration hergeleitet werden. Die Möglichkeit eines “Integrierens durch Wiegen” scheidet aus, da die Methode sehr ungenau ist. Die Masse der Eierschale des gesamten Eies im Verhältnis zu einem Quadratzentimeter Eierschale liefert unbefriedigende Ergebnisse, da man in den Grenzbereich der Auflösung der Waage kommt. Andererseits wären bei dieser Methode alle möglichen Deformationen eines Eies berücksichtigt worden.

5.3.2 Kugeln als Ei-Modelle

Kugeln haben gegenüber Rotationsellipsoiden den Vorteil, dass man das Volumen schon nach einer Messung des Durchmessers relativ genau und schnell berechnen kann. Die Modellkugeln sollen folgenden Ansprüchen genügen:

- einfaches Herstellungsverfahren und Reproduzierbarkeit
- aus Tabellenwerken bekannte und reproduzierbar konstante Wärmekapazität und Wärmeleitung;
- hitzeresistent bis 100°C;
- nicht porös (nasses Holz hat andere Wärmeleitwerte als trockenes);
- eventuell soll ein Temperatursensor platzierbar sein.

5.3.3 Idee zur Serienproduktion von künstlichen Eiern mit integrierten Meßfühlern

In einen Blumentopf wird etwa bis zur Hälfte flüssiger Gips gefüllt, in diesen wird ebenfalls bis zur Hälfte ein (z.B. mit Creme) eingefettetes Ei gepresst. Das Ganze lässt man erhärten, glättet danach die Oberfläche und fettet das Ei und die Seiten des Blumentopfs erneut ein. Man gießt zwei Rohre ein, eines davon genau senkrecht und mittig in den oberen Teil der entstehenden Form. Durch das senkrechte Rohr soll beim Herstellen der Modelle die Luft entweichen und das Anschlusskabel des Meßfühlers hineinragen, durch das andere kann man die Modellmasse einbringen. Gips birgt den Nachteil, dass die Oberfläche eventuell noch zu versiegeln wäre.

5.3.4 Zielvorgabe für die Benutzung des Standardeies

Hauptgrund für die Konstruktion eines Standardeies ist die Möglichkeit der besseren mathematisch-physikalischen Erfassung. Durch ein eingebrachtes Thermometer soll der Verlauf der Innentemperatur bei Versuchsdurchführung erfasst und veranschaulicht werden, um zu erfahren, bei welchen Temperaturen im Inneren des Messeies der Summer ertönt. Bei hoher Wärmeleitfähigkeit ist allerdings zu erwarten, dass die Anzeige bereits nach kurzer Erwärmungsphase bis nahe an die Siedetemperatur hin ansteigt.

Des weiteren soll herausgefunden werden, ob diese Apparatur eine Alternative zur Bestimmung der Wärmekapazität eines unbekannten Stoffes darstellt und gegebenenfalls als Erweiterung des Physikalischen Grundpraktikums eingeführt werden kann.

5.3.5 Suche nach dem Standardei

Bei der Suche nach dem geeignetsten Material für ein Standardei stehen einem folgende Kenngrößen zur Verfügung: Radius r , spezifische Masse ρ , Wärmeleitfähigkeit λ und spezifische Wärmekapazität c . Daher ist es zweckmäßig, die allgemeine Formel an diese speziellen Daten anzupassen. So lassen sich Oberfläche und Volumen durch die gegebenen Größen ohne Probleme ausdrücken und in die Gleichung einbinden. Das führt zu folgendem Ergebnis:

$$m(t) = \frac{Pt}{r} - \frac{n}{r} \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot cT(1 - e^{-\frac{9\lambda t}{\rho c R^2}})$$

Folgende Stoffe wurden anhand dieser Formel näher untersucht:

Stoff	$\rho / \frac{g}{cm^3}$	$c / \frac{J}{gK}$	$\lambda / \frac{W}{cmK}$
Al	2,707	0,897	2,37
Fe	7,897	0,449	0,802
Cu	8,954	0,385	4,01
Pb	11,373	0,129	0,353
V2A	7,8	0,51	0,14

Tabelle 5: Kenngrößen unterschiedlicher Stoffe

Bei einer graphischen Veranschaulichung dieser Daten zeigt sich, dass die Unterschiede zwischen den einzelnen Materialien zu keinen grundlegenden Veränderungen führen. Daher fiel die Wahl auf Kugeln mit möglichst großem Radius aus V2A-Stahl, der sich leicht beschaffen und verarbeiten lässt. Es werden sieben Kugeln aus V2A-Stahl mit einem Radius von 2,3 cm verwendet. In der Werkstatt sind sie auf der Drehbank bis kurz vor die "Pole" gefräst, der Überstand wurde mit einer Feile und einer Aluminiumschablone nachgearbeitet.

5.3.6 Standardei: Kugeln aus V2A-Stahl

Hier kommt die Schwäche der verwandten Formel zum Ausdruck (Abb. 3), da sie für die Anfangszeit eine negative verdampfte Wassermenge liefert. Dies lässt sich formal durch ein zu schnelles Abfallen des exponentiellen Terms, besonders

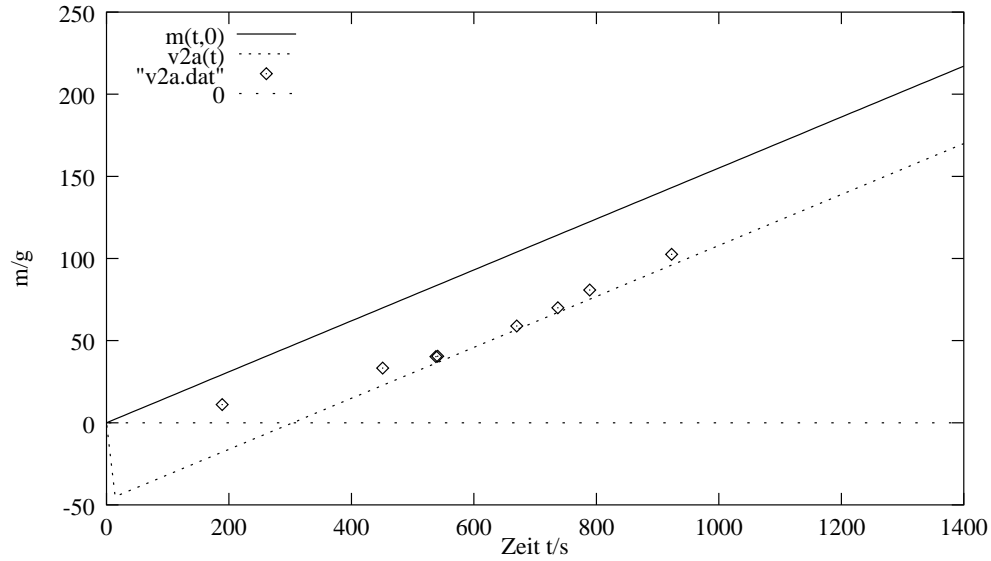


Abbildung 3: Messwerte für V2A-Stahl nach Standardverfahren, theoretische Kurven mit $\lambda = 14 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$ $c = 0,51 \frac{\text{J}}{\text{g K}}$

durch das große λ , erklären. Anschaulich gesprochen können die Standard Eier im ersten Moment mehr Energie aufnehmen, als der Eierkocher mit seiner begrenzten Heizleistung zur Verfügung stellen kann.

Des Weiteren ist zu Abbildung 4 noch näher auf die hier verwandte Meßmethode einzugehen (vgl. auch Abschnitt 8.3). Für eine ständige Überwachung der Wassermenge wird die gesamte Apparatur auf eine Waage gestellt und die verdampfte Wassermenge über eine Differenzmessung ermittelt. Dabei zeigte sich, wie bedeutsam die Restwassermenge (jeweils etwa 15g) ist. Daher unterscheiden sich die Messwerte konstant um diesen Betrag von dem erwarteten Wert. Zur Demonstration wird der letzte Messwert um genau diese Differenz (13,9g) erhöht und erneut eingetragen, was wiederum zu einer guten Übereinstimmung mit der Theorie führt.

5.4 Fehlerbetrachtung

Der größte Fehler ist systembedingt das Bestimmen der verdampften Wassermenge. Zum einen lässt sich der Meßbecher nur mit begrenzter Genauigkeit befüllen und es verdampft in der Zeit zwischen Befüllen, Wägen, Eingießen und Einschalten ein Anteil an Wasser, zum anderen bleiben etwa 15g Wasser aufgrund der unregelmäßigen Aufheizung der Verdampferschale und der Kondensation an der Eierkocherinnenseite zurück, wenn die Kochzeit beim Summerton beendet wird.

Die Fehler bei der Zeitmessung sind dagegen klein, weil Start- und Endzeit durch Schalterumlegen und Summen eindeutig definiert sind. Natürlich braucht der Beobachter beim Stoppen eine gewisse Reaktionszeit, aber die ist ungefähr konstant, ein charakteristisches Zischen zeigt nämlich an, dass das Wasser bald vollständig verdampft ist und der Zeitnehmer kann sich darauf einstellen.

Bei den V2A-Stahl-Kugeln entfällt weiterhin der Fehler durch die Abweichung

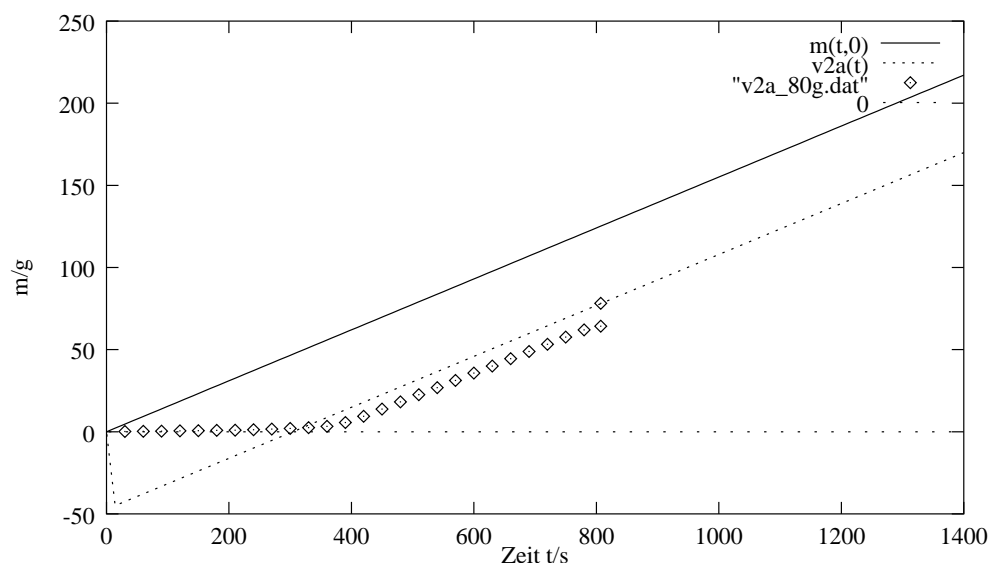


Abbildung 4: Messwerte für V2A-Stahl bei ständiger Wägung, theoretische Kurven mit $\lambda = 14 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$, $c = 0.51 \frac{\text{J}}{\text{g K}}$, $m \approx 80\text{g}$

der Maße eines einzelnen Eies von dem Mittelwert einer Ladung. Welche Abweichungen dabei erlaubt sind, zeigen die entsprechenden Richtlinien der EU, die Meßreihen der zwei Eierladungen bestätigen das. Es ist eine Massenzunahme der Eier nach dem Abkühlen im Wasser zu beobachten. Diese ist bedingt durch den Wassereintritt durch feine Haarrisse bzw. durch Osmose. Analog dazu ist ein Massenverlust nach längerer Aufbewahrungszeit zu erkennen. Die Massenschwankungen liegen in der Größenordnung von $\pm 4\text{g}$.

Um die Fehlergrenzen zu bestimmen, versucht man möglichst nahe beieinander liegende Wassermassen anzusetzen und dann die Differenz der jeweiligen Zeiten zu vergleichen, denn die Zeit kann nicht vorgegeben werden. Bei etwa 40g ($\pm 0,5\text{g}$) Wasser, 7 V2A-Kugeln erhält man Zeiten von 536s bis 545s, d.h. einen Zeitfehler von 5s, der eigentlich ein Fehler in der Massenbestimmung ist. Bei Messzeiten bis 1200s entfallen die Fehlerbalken, die Kennzeichnung der Messwerte durch "Punkte" überdeckt schon das Fehlerquadrat.

6 Verwendung im Physikalischen Grundpraktikum

6.1 Das bisherige Verfahren in der Übersicht

Im Grundpraktikum bestimmt man die spezifische Wärmekapazität c durch die sogenannte Mischungsmethode: In kochendem Wasser wird ein Probekörper aus dem zu untersuchenden Material auf die Siedetemperatur von Wasser erwärmt, man nimmt 100°C an. Im Kalorimeter befindet sich eine, durch Wägung vor und nach dem Einfüllen, bekannte Menge Wasser. Man misst die Temperatur der Wasserfüllung als Funktion der Zeit. Nach Einbringen des Körpers in das Kalorimeter stellt sich eine bestimmte Mischungstemperatur T_{mix} ein.

Durch Gleichsetzen der von dem heißen Körper abgegebenen Wärme Q_1 und der von Wasser und Kalorimeter aufgenommen Wärme Q_2 erhält man die Beziehung, aus der sich die spezifische Wärmekapazität c berechnen lässt. Man bezeichnet die Masse des Wassers mit m_W , die Zimmertemperatur mit T_0 , die Temperatur vor dem Einbringen mit T_{vor} und die nach dem Einbringen mit T_{nach} . Die Kalorimeterkonstante K ist die Wärmekapazität des Dewargefäßes.

$$c = \frac{(m_W c_W + K)(T_{mix} - T_{vor})}{m(T_0 - T_{nach})}$$

T_{vor} und T_{nach} werden durch den sogenannten Flächenausgleich ermittelt: Lange Zeit vor bzw. nach dem Einbringen ist der Temperaturverlauf $T_{vor}(t)$ bzw. $T_{nach}(t)$ nahezu linear. Diese Geraden werden in das Zeitintervall hinein verlängert, in dem der eigentliche Mischprozess stattfindet. Man idealisiert die Kurve in diesem Bereich so, dass ein Temperatursprung in Form eines Übergangs von der Funktion $T_{vor}(t)$ zu $T_{nach}(t)$ zum Zeit t_H stattfindet. Dieser Zeitpunkt wird so gewählt, dass die reale Kurve und die verlängerten Teilstücke gleiche Flächen einschließen. Es ist dabei $T_{vor} := T_{vor}(t_H)$ und $T_{nach} := T_{nach}(t_H)$.

Bei der Durchführung erhält man Fehler von etwa 10% für Aluminium und Eisen, eine wesentliche Fehlerquelle ist Bestimmen von t_H , das nach Augenmaß stattfindet. Vor allem bei Materialien mit größerer spezifischer Wärmekapazität gestaltet sich das schwierig, abgesehen davon, dass ein Ei etwa eine halbe Stunde für einen "ideal schnellen" Übergang braucht.

Warum sollte man die spezifische Wärmekapazität nicht einmal mit Hilfe einer anderen Methode bestimmen, warum immer "Rührversuche" machen, wenn man einen Eierkocher zur Hand hat?

Die Verlängerung des linearen Astes in der charakteristischen "Eierkocherkurve" bis zum Schnitt mit der Ordinatenachse lässt sich vergleichsweise einfach ermitteln:

$$m(t_c) = \frac{Pt_c}{r} - n \frac{McT}{r} = 0$$

Daraus erhält man nach einfacher Umformung:

$$c = \frac{Pt_c}{nMT}$$

Wie man sieht, lässt sich auch mit Eierkochen, d.h. mit Hausmitteln, die spezifische Wärmekapazität c eines Probekörpers bestimmen.

Im Folgenden soll schematisch dargestellt werden, wie sich der Versuch des paradoxen Eierkochers in das Physikalische Grundpraktikum, Abteilung Wärmelehre, einbeziehen ließe. Hierzu werden in groben Zügen die Voraussetzungen, die Anforderungen, die praktische Durchführung sowie gewünschte Lernziele hervorgehoben.

6.2 Voraussetzungen

Der Praktikant sollte folgende Gebiete bereits zur Vorbereitung bearbeitet haben:

- Wärmekapazität und Möglichkeiten ihrer experimentellen Bestimmung
- Verdampfungsenthalpie und latente Wärme

- Theorie der Wärmeleitung in Materie
- elektrische Heizleistung

Des Weiteren sollte in der Anleitung eine kurze Herleitung der theoretischen Formel dargestellt werden, sowie eine kurze Versuchsbeschreibung angegeben sein.

6.3 Anforderungen

Vorbereitend sollte der Teilnehmer sich zu folgenden Aspekten des Versuches Gedanken machen:

- Untersuchung der theoretischen Formel auf Schwachstellen und deren Erklärung (Graphische Darstellung bei verschiedener Anzahl von Eiern)
- Betrachtung möglicher systematischer Fehler und Lösungsvorschläge zu deren Minimierung
- Anwendbarkeit des Versuches zum Bestimmen der Wärmekapazität eines Stoffes: Umformung der Formel auf einen kugelförmigen Körper mit Radius R , Dichte ρ und Wärmeleitfähigkeit λ

6.4 Durchführung

Während der Durchführung soll der Praktikant für unterschiedliche Wassermengen und variabler Anzahl von Probekörpern z.B. aus Edelstahl, die Zeiten bis zum Ertönen des Summers (Beachtung der Reproduzierbarkeit!) ermitteln und graphisch darstellen. Mit den so gewonnenen Daten sollen folgende Fragestellungen bearbeitet werden:

- Welche effektive Heizleistung P hat der Eierkocher?
- Um wie viel unterscheiden sich die benötigten Wassermengen, damit die gemessenen Zeiten für unterschiedlich viele Körper gleich sind? Gesetzmäßigkeiten?
- Wie groß ist die Wärmekapazität des verwendeten Materials?
- Welche zusätzlichen Fehlerquellen fallen bei der Durchführung auf?

6.5 Lernziele

Der Praktikant soll zum einen den grundlegenden Begriff der Wärmekapazität besser verstehen. Jedoch liegt bei diesem Versuch ein Hauptaugenmerk auf der Durchführung. Der Student soll sich Gedanken machen, wie er zu reproduzierbaren Ergebnissen kommt und wo in seiner Apparatur bzw. Theorie Schwachstellen sind. Aus den vorangegangenen Darstellungen ist es ersichtlich, dass dies *kein* Praktikum für hochpräzise Messungen und Ergebnisse ist, sondern eher in die Arbeitsweise und Probleme einführen soll, mit denen man bei der Planung und Durchführung eigener Experimente rechnen sollte.

7 Anhang: Herleitung der Formel

Ausgangsgleichungen:

$$P = -r \frac{dm}{dt} + n \cdot q \quad (1)$$

$$M \cdot c \cdot dT = q \cdot dt \quad (2)$$

$$q = \alpha \cdot A(T_D - T) \quad (3)$$

$$\alpha \approx 3 \frac{\lambda}{R} \quad (4)$$

Verknüpfung der Gleichungen und Lösen der Differentialgleichung:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{q}{Mc} = \frac{\alpha A(T_D - T)}{Mc} = \frac{T_D - T}{\tau}; \quad \tau = \frac{Mc}{\alpha A} \quad [(3) \rightarrow (2)] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T &= \frac{T_D}{\tau} \\ e^{\frac{t}{\tau}} \left(\frac{dT}{dt} + \frac{1}{\tau} T \right) &= \frac{T_D}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} \\ \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{\tau}} T \right) &= \frac{T_D}{\tau} e^{\frac{t}{\tau}} \\ e^{\frac{t}{\tau}} T &= \frac{T_D}{\tau} \tau e^{\frac{t}{\tau}} + C \\ T &= T_D + C e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

$$T(0) = T_0 \rightarrow T_0 = T_D + C \cdot 1 \rightarrow C = T_0 - T_D$$

$$T(t) = T_D + (T_0 - T_D) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (6)$$

$$q = \alpha A(T_D - T(t)) = \alpha A(T_D - T_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [(6) \rightarrow (3)] \quad (7)$$

$$\begin{aligned} r \frac{dm}{dt} &= -P + n \alpha A \cdot \Delta T \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad [(7) \rightarrow (1)] \\ m(t) &= \frac{1}{r} \int_0^t -P dt + \frac{n \alpha A \Delta T}{r} \int_0^t e^{-\frac{t}{\tau}} dt \\ &= -\frac{P t}{r} + \frac{n \alpha A \Delta T \tau}{r} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned} \quad (8)$$

Die Masse des noch vorhandenen Wassers wird natürlich immer weniger. Da aber die Menge des verbrauchten Wassers dargestellt werden soll, erfolgt eine Umdrehung der Vorzeichen:

$$m_0 = -m(t_E) = \frac{P_E t}{r} - \frac{n M c}{r} \Delta T (1 - e^{-\frac{t_E}{\tau}}) \quad (9)$$

8 Anhang: Messwerte

Der Eierkocher hat eine Nennleistung von 350W, als Waage wurde “Mettler PM 4800 Delta Range” verwendet, die bis 400g einen Fehler von $\pm 0,01\text{g}$ und sonst von $\pm 0,1\text{g}$ hat.

8.1 Maße der verwendeten Probekörper

8.1.1 Eier der Versuche am 05.01.01

Länge/mm	Breite/mm
57,3	44,0
57,0	43,0
58,7	43,8
58,8	43,0
58,5	44,3
57,5	43,6
57,9	44,0
55,9	43,9
56,5	43,2
56,4	44,1
57,3	44,5
55,9	44,4
55,0	44,2
57,0	44,8
56,0	44,9
57,0	44,1
57,0	44,0

Tabelle 6: Meßwerte der Versuche vom 05.01.01

Für die erste Ladung gilt: 6 Eier der Güteklasse M (53 bis unter 63g) haben $V_6=340\text{ cm}^3$, 8 Eier haben eine Masse $M_8=493,23\text{g}$; 488,52g; 490,69g, d.h. im ist $M_1=61,4\text{g}$; $V_1=56,7\text{cm}^3$ ($\rho = 1,08\text{ g cm}^{-3}$)

8.1.2 Eier der Versuche am 26.01.01

Für die zweite Ladung gilt: 6 Eier der Güteklasse M (53 bis unter 63g) haben $V_6=366,8\text{cm}^3$, 10 Eier haben eine Masse $M_{10}=580,5$; 577,92; 586,42g, d.h. im ist $M_1=58,16\text{g}$; $V_1=61,1\text{cm}^3$ ($\rho = 0,95\text{ g cm}^{-3}$) (vgl. Tabelle 7)

8.2 Ergebnisse des Standardverfahrens

Bei “Standardverfahren” geht man so vor, wie in Abschnitt 3 beschrieben. Die Temperatur T_W ist diejenige zum Zeitpunkt des Einschaltens. (vgl. Tabelle 8, 9, 10)

8.3 Bestimmung des Gewichtsverlustes

Es wird der Gewichtsverlust des Systems Eierkocher-Wasser-V2A-Stahlkugeln ($r=2,3\text{cm}$) während des Kochens bestimmt (05.03.01). Durch die zusätzliche

Länge/mm	Breite/mm
57,4	43,4
55,1	44,0
55,1	44,6
58,3	43,0
57,3	42,9
55,5	43,6
58,9	42,0
54,3	44,7
57,1	42,0
56,56	43,6

Tabelle 7: Meßwerte der Versuche vom 26.01.01

Masse des Eierkochers erreicht die Waage einen Bereich, in dem sie Änderungen nur noch mit einer Genauigkeit von 0,1g anzeigt. Trotzdem liest man alle Stellen ab, sofern das noch möglich ist. Man beginnt mit ca. 40g Wasser, der genaue Startwert ist die Summe von Restwasser und letztem Messwert, der gleichzeitig den Zeitpunkt des Summens repräsentiert. (vgl. Tabelle 11)

Die selbe Messung wird mit etwa 80g Wasser in der Verdampferschale des Eierkochers bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen durchgeführt. Diesmal bleiben 13,92g als Restwasser. (vgl. Tabelle 12)

t/s	m/g	n	Durchführung	T_W	Bemerkung
16	2,3	0	26.01.01	26,7	ungenau! ohne Deckel, nichts vorgeheizt
25	3	0	26.01.01		
41	2,22	0	26.01.01		
46	0	0	05.01.01		
48	4,99	0	26.01.01		
50	5,77	0	26.01.01		
52	6,02	0	26.01.01		
53	8,2	0	26.01.01		
54	7,5	0	26.01.01		
55	4,95	0	26.01.01		
57	7,2	0	26.01.01		
61	8,95	0	26.01.01		
64	7,2	0	26.01.01		
65	8,7	0	26.01.01		
67	6,95	0	26.01.01		
80	10,5	0	26.01.01	28,6	nichts vorgeheizt
86	13,4	0	26.01.01		
89	49	0	05.01.01		
147	22	0	26.01.01		
149	22,49	0	26.01.01		
170	30	0	12.01.01		
180	27,86	0	26.01.01		
327	50	0	12.01.01		
350	50	0	12.01.01		
590	93	0	12.01.01		
596	97	0	05.01.01	90	Schütteln, nur Platte heiß ohne Deckel, nichts vorgeheizt nichts vorgeheizt nichts vorgeh., 90°C nach 127s 10g Wasser übrig
604	93	0	19.01.01		
712	97,8	0	05.01.01		
726	97	0	05.01.01		
746	97	0	05.01.01		
758	96	0	05.01.01		
790	119,6	0	16.02.01		
801	116,9	0	16.02.01		

Tabelle 8: Meßwerte des Standardverfahrens

t/s	m/g	n	Durchführung	Bemerkung
410	22,6	1	15.02.01	
380	49,32	2	15.02.01	
31	9,4	3	26.01.01	ungenau!
44	6,71	3	26.01.01	
86	7,3	3	26.01.01	
89	8,3	3	26.01.01	
115	9,75	3	19.01.01	
120	10,5	3	26.01.01	
183	18,5	3	26.01.01	
188	19,09	3	26.01.01	
208	16,72	3	19.01.01	
303	28,45	3	12.01.01	
410	43,28	3	19.01.01	
435	49	3	26.01.01	roh, Eier à 60g
514	59,3	3	12.01.01	
565	66,27	3	19.01.01	
630	73,9	3	26.01.01	
665	77,85	3	19.01.01	
725	86,23	3	12.01.01	roh
744	87	3	12.01.01	roh
889	96,5	3	05.01.01	
270	40,76	5	15.02.01	
64	5,2	6	26.01.01	
82	6,6	6	26.01.01	
127	8,45	6	26.01.01	
163	10	6	26.01.01	
215	12,6	6	26.01.01	
276	14,59	6	26.01.01	
368	17,62	6	19.01.01	
436	27,2	6	26.01.01	roh, Eier à 60g
444	29	6	19.01.01	roh
558	37,31	6	19.01.01	
590	47,77	6	19.01.01	roh
668	53,22	6	19.01.01	
763	65,51	6	19.01.01	
866	70,91	6	05.01.01	nichts vorgeheizt
1149	125,46	6	02.02.01	gekocht
1301	146,75	6	02.02.01	gekocht
480	36,48	7	15.02.01	ungenau!

t/s	m/g	n	Durchführung
189	11,04	7	02.03.01
451	33,27	7	02.03.01
737	70,01	7	02.03.01
451	33,29	7	06.03.01
189	11,04	7	06.03.01
670	58,87	7	06.03.01
923	102,54	7	06.03.01
789	80,83	7	06.03.01
538	40,33	7	06.03.01
541	40,49	7	06.03.01

Tabelle 10: Meßwerte des Standardverfahrens für V2A-Stahl

t/s	m'/g	m''/g	m'''/g
30	0,01	0,37	0,11
60	0,01	0,62	0,27
90	0,07	0,93	0,33
120	0,19	1,13	0,48
150	0,34	1,34	0,6
180	0,48	1,57	0,8
210	0,67	1,66	1,04
240	0,93	1,97	1,3
270	1,24	2,34	1,81
300	1,65	2,8	2,22
330	2,1	3,35	2,57
360	2,79	4,11	3,47
390	3,99	5,96	5,98
420	6,95	9,81	10,06
450	11,02	14,13	14,29
480	14,52	18,44	18,68
510	19,65	22,84	22,98
531	22,27		
536			24,42
540		25,76	
545		25,84	
Startwasser	37,45	39,59	38,89
Restwasser	15,18	13,75	14,56

Tabelle 11: Bestimmung des Gewichtsverlustes

t/s	30	60	90	120	150	180	210	240	270
m/g	0,19	0,26	0,37	0,52	0,63	0,8	0,99	1,28	1,59
t/s	300	330	360	390	420	450	480	510	540
m/g	2,04	2,54	3,31	5,59	9,42	13,84	18,15	22,54	26,84
t/s	570	600	630	660	690	720	750	780	807
m/g	31,27	35,72	40,03	44,49	48,85	53,25	57,6	61,98	64,3

Tabelle 12: Bestimmung des Gewichtsverlustes